Práctica 6: Método de mínimos cuadrados

1. La tabla siguiente muestra una serie de mediciones de una magnitud y (en cm) para diferentes tiempos (en seg). La técnica de medición permite despreciar los errores en la determinación del tiempo y la desviación estándar de las mediciones de y es $\sigma_y = 0.5$. Se sabe que ambas variables están relacionadas linealmente, es decir que $y_i = a t_i + b + v_i$, donde v_i es el error de medición.

t [seg]	1	2	4	6	8
y [cm]	13.9	16.6	22.2	27.7	33.2

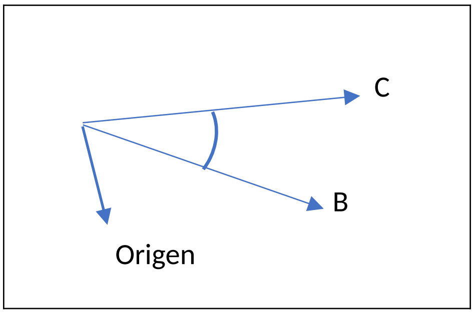
   a) Interprete la relación entre los errores de medición v_i y la desviación estándar σ_y.
   b) Realice un gráfico y vs. t.
   c) Aplicando Mínimos Cuadrados, estime los coeficientes de la recta.
   d) Calcule la matriz de var-covar de los coeficientes obtenidos en el punto anterior.
   e) Calcule el vector con los valores $\bar{y}'$ dados por el modelo y su matriz de var-covar.
   f) Grafique las mediciones, sus desviaciones estándar como barras de error y la recta que representa al modelo. Para cada t_i, indique con barras de error las incertezas de y_i'.

2. Si tiene un dispositivo que rota con una velocidad angular constante en el tiempo. El dispositivo cuenta con un contador de ciclos acumulados, cuyo punto de cero es desconocido. Se toman 6 lecturas a intervalos constantes, obteniendo la tabla siguiente. El manual del contador de ciclos indica que la desviación estándar de cada medición es del 1% del valor medido y que el error en la determinación del tiempo es despreciable.

t [seg]	0	2	4	6	8	10
L [ciclos]	97.4	124.7	161.6	178.1	200.0	222.9

   a) Proponga un modelo entre las mediciones L_i y los tiempos t_i.
   b) En base al punto (a), estime el incremento esperado entre mediciones consecutivas. Estime también su desviación estándar.
   c) Estime el valor de L para $L = 12$ seg. Estime también su desviación estándar.
   d) Estima el tiempo, con su error, para el cual la lectura será 190 ciclos.
   e) Proponga un modelo alternativo para abordar el problema donde se generan pseudo - observaciones calculando las diferencias en mediciones consecutivas $d_i = L_{i+1} - L_i$.

3. La figura siguiente representa el proceso aplicado para estimar el ángulo β, que consistió en medir dos veces la distancia angular entre el Origen y el punto B, da_1^B y da_2^B, y dos veces la distancia angular entre el Origen y el punto C, da_1^C y da_2^C.



Se proponen dos procedimientos para estimar el ángulo β:

i. Determinar las pseudo – mediciones $\alpha_1 = da_1^B - da_1^C$; $\alpha_2 = da_2^B - da_2^C$ y $\alpha_3 = da_1^B - da_2^C$.

ii. Determinar las pseudo – mediciones $\alpha_1 = da_1^B - da_1^C$ y $\alpha_2 = da_2^B - da_2^C$.

a) Para cada procedimiento, estime un valores para β y σ_β.

b) Compare y analice los resultados obtenidos en cada procedimiento.

4. La tabla siguiente muestra una serie de mediciones de una magnitud y para diferentes tiempos. La técnica de medición permite despreciar los errores en la determinación del tiempo y la desviación estándar de la medición y es igual al 10% de su valor. Considere que las mediciones son independientes entre sí.

t[seg]	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y[cm]	80	52	36	25	27	59	103	188	322	518

a) Construya la matriz de var-covar de las mediciones, y realice un gráfico y vs. t.

b) Aplique Mínimos Cuadrados para calcular el coeficiente de la recta $y_i = b + v_i$, donde v_i es el error de medición, calcule también su varianza y grafique la recta sobre el gráfico realizado en el inciso anterior. Recordando los conceptos de la práctica anterior, ¿a qué equivale el coeficiente b obtenido en el punto anterior?

c) Plantee el método de Mínimos Cuadrados para el modelo de recta $y_i = a\,t + b + v_i$, determine las dimensiones del vector de parámetros resultante y de su matriz de varianza-covarianza. Ingrese al <u>*GoogleColab*</u> que se encuentra en el *Moodle* de la cátedra, corra el *script* y analice sus resultados, ¿qué conclusión saca del gráfico?

d) Plantee las matrices de diseño necesarias para realizar ajustes de mínimos cuadrados con modelos polinómicos de grado 2 a 4 en t; ¿qué dimensiones tendría la matriz de var-covar de los resultados en cada caso? Ingrese al *GoogleColab* que se encuentra en el *Moodle* de la cátedra, corra el *script* y analice sus resultados.

e) Una forma de medir la 'calidad del ajuste' que da el modelo es utilizando el estadístico (variable aleatoria) $M=\bar{v}^t C_y^{-1} \bar{v}$, donde $\bar{v}$ es un vector de los residuos, definido como $\bar{v}=\bar{y}-\bar{y}\,'$, donde $\bar{y}$ es el vector de las mediciones e $\bar{y}\,'$ es el vector que se obtiene de calcular el modelo para las correspondientes mediciones. Discuta cómo se comporta dicho estadístico ante variaciones de $\bar{v}$ y C_y^{-1}. Ingrese al *GoogleColab* que se indica en el Moodle de la cátedra, corra el script y defina el modelo que mejor ajusta los datos.

f) Evalúe cómo variarían los ajustes si todas las mediciones tuviesen un error constante, igual a 5 cm. Ingrese al GoogleColab que se encuentra en el *Moodle* de la cátedra, corra el *script* y discuta sus resultados.

5. Dadas tres mediciones de puntos en el plano $Z=f(x,y)$, $f(1,1)=5.7$, $f(0,0.5)=3.75$ y $f(1.5,1.5)=8.9$, donde los valores de Z tienen una dispersión de 0.5 y las variables x e y se miden con error despreciable.

a) Aplicando mínimos cuadrados, encuentre la expresión del plano que pasa por el origen y mejor aproxima a las mediciones, y las desviaciones estándar de sus coeficientes.

b) Plantee el problema de mínimos cuadrados, en el caso en que se desconoce si el plano pasa por el origen.

6. La tabla siguiente muestra un conjunto de mediciones de una variable y y su desviación estándar en función del tiempo. La precisión en la medición del tiempo es mucho más precisa que la alcanzada para la medición de la variable y.

t [seg]	0	0.2	0.3	0.4	0.5
y [cm]	1.0	1.9	2.0	2.0	1.4
Desv. Est.	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1

La relación (modelo) entre y y t puede expresarse como $y_i=A\sin(2\pi f\,t_i)+v_i$, donde v_i representa el error de medición.

a) Aplique el método de Mínimos Cuadrados para estimar los parámetros del modelo.

b) Calcule la matriz de var-covar de los parámetros y obtenga sus desviaciones estándar.

c) Indique el tipo de problema de Mínimos Cuadrados resuelto: lineal/no-lineal, pesado/no pesado. Justifique su respuesta.

d) Calcule los valores que da el modelo ajustado para cada medición y_i. Calcule también las desviaciones estándar de estos valores.

e) Calcule el valor de y que el modelo predice para los tiempos 0.25 seg y 0.8 seg. Estime la desviación estándar de estos valores.

f) Utilizando el modelo estime el tiempo (o los tiempos) en el que el objeto estará en su posición de equilibrio. Estime también la desviación estándar.

7. Se quiere determinar las coordenadas de un punto en $\Re^2$. Se dispone de mediciones entre el punto desconocido y tres puntos de coordenadas conocidas. La tabla siguiente muestra las coordenadas y las distancias medidas a cada uno. La desviación estándar de las mediciones de distancia es igual a 0.5m.

Punto	Coord. X [m]	Coord. Y [m]	Dist. [m]
1	10.3	5.7	7.8
2	4.8	7.1	6.7
3	-2.0	4.0	7.3

a) Proponga un modelo (expresión analítica + componente estadística) que vincule las mediciones de distancia con las coordenadas de los puntos conocidos y las coordenadas del punto desconocido.

b) Aplicando el método de Mínimos Cuadrados, estime las coordenadas del punto desconocido y sus errores (desviaciones estándar).

c) Explique el tipo de problema de Mínimos Cuadrados que implica el cálculo de los parámetros.

d) El comportamiento de una variable en el plano está dado por $V(x, y) = 1.5\, x\, y^2$. Calcule el valor de V en el punto en cuestión y su desviación estándar.

8. Se conocen las lecturas de la posición de un objeto que oscila en torno a su posición de equilibrio para cinco tiempos distintos. Las lecturas tienen un error del 1.5 m y el error en la medición del tiempo es despreciable.

a) Plantee el problema de mínimos cuadrados, si se sabe que la posición de equilibrio dista del origen en 12 metros, y la fase de la función es cero.

b) Plantee el problema de mínimos cuadrados, si se desconoce la ubicación de la posición de equilibrio, pero se sabe que la fase de la función es cero y su período 10 horas.

c) Plantee el problema de mínimos cuadrados cuando se sabe que su posición de equilibrio es 0 metros, y se desconocen tanto su fase como su período.

9. Se tienen dos muestras, cada una compuestas por diez lecturas, de la posición de un objeto que oscila en torno a su posición de equilibrio. Las lecturas tienen un error del 0.3 m y no están correlacionadas, el error en la medición del tiempo es despreciable. La **Muestra 1** está distribuida a lo largo de todo el período, en tanto que la **Muestra 2** se compone de mediciones tomadas en determinados intervalos. En el *Moodle* de la cátedra se encuentra un script de GoogleColab que realiza tres iteraciones del ajuste de mínimos cuadrados para estas muestras, y grafica los resultados. En el panel de la izquierda se muestran los ajustes para la **Muestra 1**, y en el de la derecha para la **Muestra 2**. En ambos casos, la curva punteada (verde) representa la primera iteración, la curva a trazos (azul) la segunda, y la curva de puntos y trazos (azul) la tercera, mientras que la curva continua (roja) representa el modelo a partir del cual fueron generadas las muestras.
   a) Corra el *script* de GoogleColab que se encuentra en el *Moodle* de la cátedra unas diez veces, en cada ocasión analice los resultados, y en particular las matrices de varianza covarianza de ambas muestras.
   b) A diferencia del inciso anterior, en que los valores iniciales propuestos, a0 y f0, eran cercanos a los valores ajustados, en este nuevo *script* se proponen valores iniciales alejados de lo que podría aproximarse a partir de los gráficos. ¿Qué observa?