Práctica 4: Funciones principales de probabilidad y de densidad de probabilidad

1. En el juego de la ruleta, sacar un pleno consiste en acertar un número de un total de 37 (los números válidos son lo que están en el rango 0 y 36).
   a) Calcule la probabilidad de sacar un pleno en una jugada.
   b) Utilizando una función de probabilidad adecuada, calcule la probabilidad de sacar dos plenos en tres jugadas.
   c) Calcule la probabilidad de sacar dos plenos en seis jugadas.
   d) Calcule el número esperado de plenos en diez jugadas, ¿y en 37?
2. En el juego de generala, una jugada consiste en tirar cinco dados. Se obtiene un póquer si la jugada resulta en que cuatro dados muestran el mismo número, y en generala si los cinco dados coinciden. Mediante la función de probabilidad adecuada:
   a) Calcule la probabilidad de obtener un póquer en una jugada.
   b) Calcule la probabilidad de obtener generala en una jugada.
   c) Encuentre la función que da la probabilidad de sacar k póqueres en 10 jugadas, donde k es un número entero entre 0 y 10. Grafique la función obtenida y calcule el número esperado de póqueres en 10 tiradas.
   d) Se hacen diez mil jugadas de diez tiradas cada una. Calcule el número esperado de jugadas con k póqueres, donde k es un número entero entre 0 y 10.
3. Se tienen diez partículas en una región donde existen cuatro agujeros. La geometría del sistema dicta que las partículas caerán en alguno de los agujeros, siendo idéntica la probabilidad de que cada partícula caiga en cualquier agujero. Encuentre la función que rige la probabilidad de que k partículas caigan en uno de los agujeros en particular, donde k es un número entero entre 0 y 10.
4. La cantidad de partículas en la atmósfera se puede medir mediante un procedimiento que consiste en tomar un cierto número de muestras de aire. Luego, para cada muestra se cuenta la cantidad de partículas por unidad, resultando en una tabla similar a la siguiente:

Cantidad de partículas	0	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad de muestras	38	75	89	54	20	19	4	1

   a) Calcule las frecuencias medidas que surgen de la tabla.
   b) Encuentre una expresión para la función de probabilidad teórica que mejor represente a las mediciones.

c) Calcule las frecuencias teóricas que se corresponden con las frecuencias observadas.
d) Realice un gráfico donde aparezcan las frecuencias observadas y teóricas. Analice visualmente si la función teórica representa bien a las mediciones.
e) Analice cómo variaría la función de probabilidad teórica si se duplicara el volumen de aire correspondiente a cada muestra.

5. Registros sísmicos acumulados durante 200 años muestran que una ciudad ha sufrido un promedio de 1 terremoto por década. Suponiendo que la ocurrencia de terremotos es aleatoria:
   a) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos un terremoto en la próxima década.
   b) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos un terremoto en los próximos 75 años.
6. Utilice un método de generación de números pseudo – aleatorios para construir dos series de 500 números pseudo – aleatorios en el intervalo [0,1]. Considerando a dichas series como las componentes de 500 pares ordenados, contenidos en la región limitada por $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $0 \leqslant x \leqslant 1$ en el plano $\mathbb{R}^2$:
   a) Divida la región en 100 celdas y cuente la cantidad de pares en cada una
   b) Realice un histograma de su distribución (cantidad de pares vs. cantidad de celdas), y a partir de éste, proponga una función de probabilidad que represente los datos.
   c) Repita el análisis para 1000 y 5000 pares ordenados.
7. Para una función de probabilidad de Poisson que tiene una moda doble en 0 y 1, calcule la probabilidad que toma en sus modas.
8. Sea la función de densidad de probabilidad $f(x)=C\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
   a) Encuentre la expresión para C que normaliza $f(x)$.
   b) Encuentre expresiones para la media y varianza de la variable aleatoria X . Interprete los resultados.
   c) Verifique que $f(x)$ tiene puntos de inflexión en $a-b$ y $a+b$.
9. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad de Gauss, con media igual a 1 y varianza 4.
   a) Calcule el valor máximo que toma la función de densidad.
   b) Calcule la probabilidad de que $X \geqslant 2$.
   c) Calcule la probabilidad de que $0 \leqslant X \leqslant 2$.

d) Calcule las probabilidades de las siguientes condiciones:

i. $-\sigma \leqslant X - \mu_X \leqslant \sigma$

ii. $-2\sigma \leqslant X - \mu_X \leqslant 2\sigma$

iii. $-3\sigma \leqslant X - \mu_X \leqslant 3\sigma$

10. Cuando se mide varias veces una cantidad constante en el tiempo, donde las mediciones están afectados solamente por errores aleatorios del instrumento, la serie de mediciones resultante puede ser considerada una muestra de mediciones de una variable aleatoria X , con función de densidad de probabilidad de Gauss. La media y varianza de esta función serán igual al promedio y estimador de la varianza de los valores medidos.

    Si se mide repetidamente el diámetro de un cable el resultado es una serie de mediciones con un valor medio de 0.8 mm y un estimador de varianza igual 0.0004 mm^2:

    a) Diga cuál es el valor más probable del diámetro.

    b) Calcule la probabilidad de que el diámetro del cable sea mayor que 0.81 mm.

    c) Si se considera que un cable es defectuoso cuando su diámetro difiere, en valor absoluto, en más de 0.025 mm respecto de su valor medio. Calcule la probabilidad de que el cable sea defectuoso.

11. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad normal (o de Gauss) con media igual a 0 y varianza igual a σ_X .

    a) Encuentre la función de densidad de probabilidad de la variable definida como $Y = X^2$.

    b) Determine la probabilidad de que $\sigma^2 \leqslant Y \leqslant 4\sigma^2$.