Práctica 3: Distribución conjunta – Propagación de errores

1. En el archivo P3E1_data.txt se presentan los datos demográficos surgidos del censo 2010, segmentados por rango etario, género y nacionalidad (nativo ó extranjero). Determine la probabilidad de elegir en forma aleatoria una persona para cada segmento de la tabla.
   a) Grafique la función de probabilidad para ambos géneros, cuando se restringe el estudio a la población nativa.
   b) Grafique la función de probabilidad para ambos géneros, cuando se restringue el estudio a la población extranjera.
   c) Determine la probabilidad de elegir en forma aleatoria:
      i. Una persona de menos de 15 años.
      ii. Una persona de género masculino que tenga al menos 70 años.
      iii. Una persona de género femenino que tenga menos de 15 años y sea nativa.

2. Sea (X, Y) un par de variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 0.25, & -1<x<1, -1<y<1 \\ 0, & resto \end{cases}$$

   a) Realice un gráfico del dominio de $f_{X,Y}(x,y)$ e indique la región dónde la función es nula y dónde no lo es.
   b) Encuentre las expresiones para las funciones de densidad marginales.
   c) ¿Son las variables estadísticamente independientes?
   d) Encuentre la expresión de la función de densidad de probabilidad de X condicionada a $Y=0.75$.
   e) Encuentre la expresión de la función de densidad de probabilidad de Y condicionada a $X\leqslant 0.6$.

3. Sea (X, Y) un par de variables aleatorias cuya función de densidad de probabilidad conjunta es:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, 0<y<2x \\ 0, & resto \end{cases}$$

   a) Realice un gráfico del dominio de $f_{X,Y}(x,y)$ e indique la región dónde la función es nula y dónde no lo es.
   b) Encuentre las expresiones para las funciones de densidad marginales.

c) ¿Son las variables estadísticamente independientes?

d) Encuentre la expresión de la función de densidad de probabilidad de Y condicionada a $X=x$.

e) Encuentre la expresión de la media de Y condicionada a $X=x$.

f) Calcule la media de Y condicionada a $X=0.75$.

4. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias cuya densidad de probabilidad conjunta es $f(x_1, x_2)=2e^{-(x_1+x_2)}$ para $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$, y vale 0 en el resto del plano. Considere la transformación $y_1=2x_1$ y $y_2=x_2-x_1$.

a) Encuentre la expresión para la densidad de probabilidad conjunta de y_1 e y_2 .

b) Analice si y_1 e y_2 son variables independientes.

5. Sean X e Y variables aleatorias continuas con densidad de probabilidad conjunta dada por: $f(x, y)=\frac{\beta}{x^2 y^{3/2}}$ para $1 \leqslant x \leqslant 5 ; 1/x \leqslant y \leqslant x$, con β constante.

a) Obtener las expresiones para las marginales de X e Y .

b) Obtener la expresión para la función condicional de X dado $Y=y$, donde y es un valor fijo.

c) Obtener una expresión para el valor esperado de X condicionado $Y=y$ a , donde y es un valor fijo.

6. Se tiene un conjunto de partículas con una densidad superficial uniforme sobre una esfera de radio R .

a) Encuentre una expresión para la función de densidad de probabilidad dependiente de las coordenadas esféricas (λ, φ) , donde φ es la coordenada medida sobre el meridiano desde el plano central.

b) Calcule la probabilidad de encontrar una partícula con φ en el rango $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

7. Sea (X, Y) un par de variables aleatorias con una cierta función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$.

a) Demostrar que el coeficiente de correlación entre ambas variables cumple con la condición: $-1 \leqslant \rho_{X,Y} \leqslant 1$.

b) Calcule el valor del coeficiente de correlación si las variables aleatorias son estadísticamente independientes.

c) Si existe una función analítica entre ambas variables, es decir $Y=H(X)$, entonces $\rho_{X,Y} \approx \pm 1$.

8. Sea (X, Y) un par de variables aleatorias con densidad de probabilidad conjunta de Gauss, dada por dada por: $f_{X,Y}(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right\}\right\}$.
   a) Encuentre las expresiones para las funciones de densidad de probabilidad marginal de cada variable.
   b) Sean R y Φ las coordenadas polares en el plano obtenidas de transformar (X, Y) . Encuentre la expresión de función de densidad de probabilidad conjunta para este nuevo par de variables aleatorias, $f_{R,\Theta}(r, \theta)$.
   c) Encuentre la expresión de la funcional densidad de probabilidad marginal de R , para el caso en que $\sigma_x=\sigma_y$.
   d) Repita los puntos anteriores para el caso de una función de Gauss en tres dimensiones en coordenadas cartesianas $f_{X,Y,Z}(x, y, z)$ y en coordenadas esféricas $f_{R,\Theta,\Phi}(r, \theta, \varphi)$.
9. La ley de Maxwell-Boltzmann tridimensional da la forma en que se distribuyen las velocidades en un gas uniforme. La expresión de esta función es:
$$f_{\bar{V}}(v_x, v_y, v_z)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3}\exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)\right\}$$
   donde (v_x^2, v_y^2, v_z^2) son las coordenadas cartesianas del vector velocidad $\bar{V}$.
   Encuentre la expresión para la media de $\xi=\frac{1}{V}$, donde V es el módulo del vector velocidad $\bar{V}$.
10. Sea $X_{n\times1}$ un vector $(n\times1)$ de variables aleatorias cuya matriz de var-covar es $C_{X_{n\times1}}$.
   a) Sea $Y_{m\times1}$ un vector $(m\times1)$ de variables aleatorias que resulta de la siguiente operación $Y_{m\times1}=A_{m\times n}X_{n\times1}$, donde $A_{m\times n}$ es una matriz de elementos reales. Encuentre la expresión para la matriz de var-covar de $Y_{m\times1}$.
   b) Sea $Y_{m\times1}=\bar{F}(X_{n\times1})$, donde $\bar{F}:\Re^n\rightarrow\Re^m$ es una función no-lineal en $X_{n\times1}$. Encuentre la expresión para la matriz de var-covar de $Y_{m\times1}$.
   c) Compare y analice las expresiones obtenidas en los incisos a) y b).
11. Se miden las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto en el plano. Las mediciones son independientes y la desviación estándar de la medición de y es 3 veces la desviación estándar de la medición en (x, y) .
   a) Aplicando la teoría de propagación de errores, encuentre la expresión de la matriz de var-covar para las coordenadas polares, $f_{R,\Theta}(r, \theta)$, del mismo punto.

b) Analice los elementos de la matriz de var-covar de (r,θ) si las coordenadas cartesianas medidas son $(1,1)$.

c) Analice los elementos de la matriz de var-covar de (r,θ) si las coordenadas cartesianas medidas son $(1,0)$.

d) Grafique en el plano las medidas y desviaciones estándar obtenidas en los puntos b) y c).

e) En algunos textos aparecen las siguientes expresiones (no rigurosas) para aproximar la propagación de errores:

$$\sigma_r=\frac{\partial r}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\sigma_x+\frac{\partial r}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\sigma_y\ ;\ \sigma_\theta=\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\sigma_x+\frac{\partial \theta}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\sigma_y\ .$$

Compare estas expresiones con las obtenidas en el inciso a), aplicando la propagación de errores rigurosamente estadística. Analice las diferencias.

12. Se tiene una serie de mediciones de la posición de un móvil $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ obtenidas en los tiempos $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, donde todas las mediciones de posición tienen igual precisión y las mediciones del tiempo tienen error despreciable.

a) La 'pseudo medición' de la velocidad se define como $\dot{x}_j=\frac{x_{j+1}-x_j}{t_{j+1}-t_j}$, con $j=2,\ldots n-1$. Encuentre la expresión para la matriz var-covar del vector de las velocidades.

b) Si las mediciones se realizan a intervalos constantes de tiempo, encuentre la expresión para la matriz obtenida en el punto a).

13. Se tiene una serie de posiciones, $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, medidas a lo largo del tiempo a intervalos constantes $t_i=t_0+i\cdot\Delta t$. Considere que las posiciones a lo largo del tiempo son no correlacionadas y de igual precisión; y que t_i se miden con un error despreciable. Se define un conjunto de variables nuevas para estimar dadas por:

$$y_i=\frac{x_{i+1}^2-x_i}{\Delta t};i=2,\ldots n-1$$

Encuentre la expresión para la matriz de var-covar de $\bar{y}$.