Práctica 2: Variable aleatoria

1. Sea X la variable aleatoria discreta definida como el número que aparece en la cara de un dado (de seis caras) cuando este es lanzado.
   a) Encuentre la expresión para la función de probabilidad de X y de su función de probabilidad acumulativa.
   b) Grafique las dos funciones encontradas en el punto a).
   c) Repita los puntos anteriores para un dado 'cargado', en el que el número 4 tiene una probabilidad igual al doble que la de cada uno del resto de los números y las probabilidades de estos son todas iguales.
2. Sea W una magnitud representada por una variable aleatoria continua con una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(w)=\begin{cases} a\cdot w\,,\ para\, w\in[0,1] \\ 0\,,\ para\, w\notin[0,1] \end{cases}$$

   a) Calcule el valor de a. Grafique la función $f(w)$.
   b) Calcule la probabilidad de que $W\in[0,0.5]$ y de que $W\notin[0.5,1]$.
   c) Calcule la media, μ_W, de W.
   d) Calcule la varianza, σ_W^2, y la dispersión, σ_W, de W.
   e) Encuentre y grafique la función de densidad de probabilidad acumulativa de W.
3. Un grupo de partículas se encuentra distribuido sobre una esfera con densidad superficial (cantidad de estrellas por unidad de área) constante. Se define el parámetro I (declinación) de una estrella, como el ángulo entre esta y el plano 'ecuatorial' de la esfera. Encuentre la expresión para la función de densidad de probabilidad de I.
4. Sea Z una variable aleatoria continua y real. Se definen dos variables aleatorias nuevas dada por las siguientes relaciones: $W=c\cdot Z$ y $Y=c+Z$, donde c es una constante.
   a) Encuentre expresiones para las medias y las varianzas de W y Y, en función de la media y la varianza de Z.
   b) Proponga una función de densidad de probabilidad e interprete gráficamente las expresiones obtenidas sobre la forma de esta función.
5. Se dice que una variable Y está 'estandarizada' cuando se cumple que $\mu_Y=0$ y $\sigma_Y=1$. Sea X una variable aleatoria continua que define otra variable dada por $Z=a\cdot X+b$. Encuentre expresiones para a y b como funciones de los parámetros (media y varianza) de X, que hacen a Z una variable estandarizada.

6. La distancia de Manhattan desde un punto en el plano con coordenadas (x, y), está definida como $d_M = |x| + |y|$. Se toma al azar un punto del primer cuadrante, tal que $0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1$.
   - a Encuentre la expresión para la probabilidad de que la distancia de Manhattan del punto cumpla con $d_M < D$, con $0 \leqslant D \leqslant 1$.
   - b Encuentre la expresión para la probabilidad de que la distancia de Manhattan del punto cumpla con $d_M < D$, con $0 \leqslant D \leqslant 2$.
7. La variable aleatoria continua I representa la corriente eléctrica que circula por un circuito con una resistencia de 2 Ohm. La función de densidad de probabilidad de I es una función uniforme en el intervalo $[0,4]$ amperes.
   - a) Calcule las probabilidades de que I se encuentre en la primera y segunda mitad de su rango de variación.
   - b) La potencia del circuito está dada por una nueva variable aleatoria definida como $P = 2 \cdot I^2$. Justifique por qué P es una variable aleatoria, defina su rango de variación y encuentre su función de densidad de probabilidad.
   - c) Calcule las probabilidades de que P se encuentre en la primera y segunda mitad de su rango de variación. Analice las probabilidades obtenidas en contraste con los resultados obtenidos en el punto a).
   - d) Encuentre la función de probabilidad de la variable aleatoria Q, si la relación funcional es $Q = 2 \cdot (I-1)^2$.
8. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad $f(x) = 3 \cdot x^2$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ y 0 para el resto del intervalo.
   - a) Calcule media, desviación estándar y la función de probabilidad acumulativa de X.
   - b) Encuentre una función $x = h(u)$ de manera que U sea una variable aleatoria con densidad de probabilidad uniforme en el intervalo $[0,1]$.
9. La velocidad de una molécula en un gas uniforme en equilibrio es una variable aleatoria V con función de densidad de probabilidad de Maxwell-Boltzmann, dada por $f(v) = a \cdot v^2 e^{-b \cdot v^2}$, definida solamente para valores positivos de v.
   - a) Encuentre una expresión de a como función de b *.
   - b) Encuentre la expresión para la función de densidad de probabilidad de la energía cinética de la molécula, dada por $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$. Considere que su masa es $2.76 \cdot 10^{-23}$ kg.

c) Dado que $b=\frac{m}{2kT}$, donde $k=1.38\cdot 10^{-23}\,J\cdot K^{-1}$ y $T=100\,K$, calcule la probabilidad de que la molécula tenga una energía cinética menor a $2\cdot 10^{-21}\,J$ *.

d) Indique el intervalo de velocidades que se corresponde con dicho intervalo de energía.

* Tenga en cuenta que $F_{Gauss}(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=1$ y $\int_0^{1.449}\sqrt{x}\,e^{-x}dx=0.525$

10. Sea Y una variable aleatoria con densidad de probabilidad:

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\beta}e^{-y/\beta}, \; para\; y>0\\ \frac{1}{2}, \; para\; -1<y<0\\ 0, \; para\; el\; resto\end{cases}$$

Encuentre la expresión para la densidad de probabilidad de $U=\sqrt{1+Y}$.

11. La desigualdad de Chevyshev establece que, para una variable aleatoria X, $P(|X-\mu_X|\geq k\cdot\sigma_X)\leq k^{-2}$. Esta expresión es útil para acotar la probabilidad de que la variable se encuentre en diferentes rangos centrados en su media.

a) Mediante la desigualdad de Chevyshev, calcule una cota superior para la probabilidad de que una variable aleatoria X en el rango dado por $|X-\mu_X|\geq\frac{3}{2}\sigma_X$.

b) Calcule la probabilidad exacta para la función de densidad de probabilidad dada en el ejercicio 2.