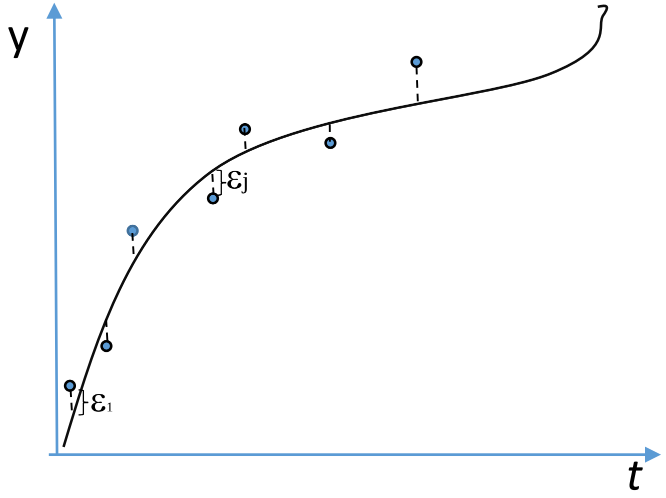
MAGGIA LABORATORIO

Mínimos cuadrados

Es una técnica de optimización matemática que dada una serie de mediciones, intenta encontrar una función que se aproxime a los datos (o mejor ajuste)

Elegir un método donde ε_i sea lo *"mas chico posible"*



$$\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{\varepsilon}$$

$$\vec{e}^T P \vec{e} = mín$$

Problemas a tratar:

a) Observaciones directas
b) Observaciones indirectas: i) Caso lineal y ii) Caso no-lineal

Observaciones directas

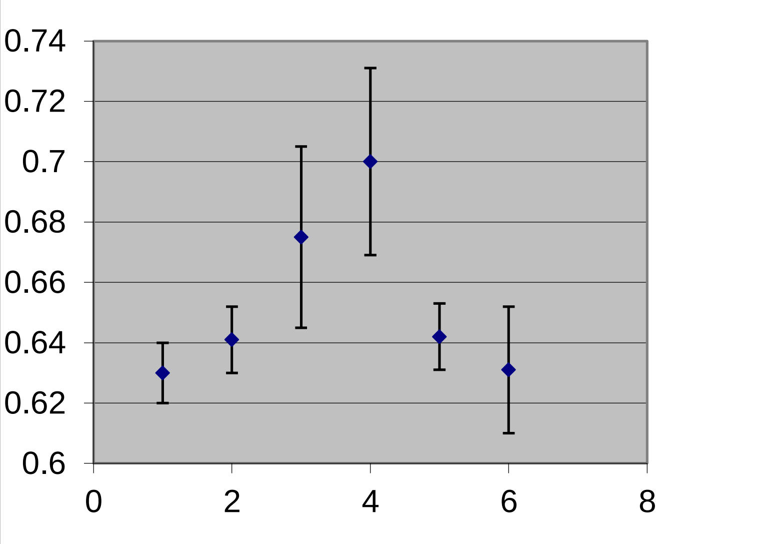
Tengo una serie de observaciones de un mismo objeto:

Ecuación de observación

$$\boxed{\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{\varepsilon}} \Rightarrow \boldsymbol{y}_\mathrm{i} = \boldsymbol{x} + \varepsilon_\mathrm{i}$$

i=1…n (n observaciones)

I (Ampere)	
0.63	0.01
0.641	0.011
0.675	0.03
0.7	0.031
0.642	0.011
0.631	0.021



Modelo determinista:

$$\eta_\mathrm{i} = \boldsymbol{x}$$

$$\vec{\eta} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}\text{ (Matriz de diseño)}} (x)$$

Es el parámetro incógnitas del problema

$$\vec{\eta} = \mathbf{A}(x)$$

Finalmente la Ecuación de observación la puedo escribir como:

$$\boxed{\vec{y} = \mathbf{A}\,x + \vec{\varepsilon}}$$

MAGGIA LABORATORIO

Observaciones directas

Modelo estadístico: Como se comportan los errores???

$$E[\vec{e}]=0$$

$$C_e=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Matriz de Peso se define como:

$$C'_e=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sigma_0^2}; \qquad P=C'^{-1}_e$$

Intensidad (Ampere)	
0.63	0.01
0.641	0.011
0.675	0.03
0.7	0.031
0.642	0.011
0.631	0.021

Observaciones directas

Condición sobre los errores que definen al método:

$$\boxed{\vec{e}^{T} P \vec{e} = mín}$$

Finalmente tenemos el siguiente sistema:

Debemos minimizar $\vec{e}^{T} P \vec{e}$ sujeto a las <u>n condiciones</u> : $\vec{y} = Ax + \vec{e}$

$\downarrow$

Función Lagrangiana del problema:

$$D = \vec{e}^{T} P \vec{e} - 2k^{T} (\vec{y} - \vec{e} - Ax), \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\partial D}{\partial x} dx + \frac{\partial D}{\partial \vec{e}} d\vec{e} + \frac{\partial D}{\partial \vec{k}} d\vec{k} = 0$$

MAGGIA LABORATORIO

Observaciones directas

Condición sobre los errores que definen al método: $\vec{e}^{\,T} P\, \vec{e} = mín$

$$\Delta = \vec{\varepsilon}^{\,T} P \vec{\varepsilon} - 2\vec{k}^{T}\left(\mathbf{y} - \vec{\varepsilon} - Ax\right), A = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial x} dx + \frac{\partial \Delta}{\partial \vec{\varepsilon}} d\vec{\varepsilon} + \frac{\partial \Delta}{\partial \vec{k}} d\vec{k} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = 2\,\vec{k}^{T} A = 0$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vec{\varepsilon}} = 2\vec{\varepsilon}^{\,T} P + 2\vec{k}^{T} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vec{k}} = -2\left(\mathbf{y} - \vec{\varepsilon} - Ax\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{x} = \left(A^{T} P A\right)^{-1} A^{T} P \vec{\mathbf{y}}$$

Observaciones directas

Finalmente:

$$\tilde{x} = \boxed{\left(A^T P A\right)^{-1} A^T P}\, \vec{\mathbf{y}} \qquad \mathrm{C}_{\mathbf{y}} = \mathrm{C}_{\varepsilon}$$

Aplicando la Regla de Propagación de errores:

$$C_{\tilde{x}} = \left(A^T C_{\mathbf{y}} A\right)^{-1}$$

1) Qué podemos decir referente al Método de máxima verosimilitud y mínimos cuadrados?

$$f_j \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mathrm{y}_j - x)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}y$$

$$\ell = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{y}_j - x)^2 + \mathrm{const}$$

máxima

mínima

Asumimos una f.d.p gaussiana, cada muestra tiene varianza conocida y todas tienen el mismo valor medio:

$$f(\mathsf{x}^{(j)};\lambda)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp\left(-\frac{(\mathsf{x}^{(j)}-\lambda)^2}{2\sigma_j^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$L = \prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp\left(-\frac{(\mathsf{x}^{(j)}-\lambda)^2}{2\sigma_j^2}\right) \longrightarrow \qquad \ell = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{(\mathsf{x}^{(j)}-\lambda)^2}{\sigma_j^2}+\text{const.}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\lambda} = \sum_{j=1}^{N}\frac{\mathsf{x}^{(j)}-\lambda}{\sigma_j^2} = 0.$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{\mathsf{x}^{(j)}}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_j^2}}. \longrightarrow \qquad \boxed{p_j = \frac{1/s_j^2}{\sum_{j=1}^{t} 1/s_j^2}}$$

MAGGIA
LABORATORIO

Volvemos a el valor de p_i !!!!!!

$$\frac{d\ell}{d\lambda} = \sum_{j=1}^{N} \frac{x^{(j)} - \lambda}{\sigma_j^2} = 0.$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{x^{(j)}}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j^2}}. \longrightarrow \boxed{p_j = \frac{1/s_j^2}{\sum_{j=1}^{t} 1/s_j^2}}$$

Para nuestro caso que tenemos un vector de estimador de medias, con sus desviaciones estandard

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{t} p_i \tilde{\mu}_i \qquad y \quad C_{\vec{\tilde{\mu}}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\sigma_{\widetilde{\mu}_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \widetilde{\sigma_{\widetilde{\mu}_t}} \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{p_j = \frac{1/\sigma_{\tilde{\mu}_i}^2}{\sum_{j=1}^{t} 1/\sigma_{\tilde{\mu}_i}^2}}$$

Ejemplo de poblaciones fraccionadas:

Hemos medido 6 instrumentos distintos la intensidad de corriente en un circuito, en cada oportunidad el registro fue de 10 veces con cada instrumento. Obteniendo el siguiente resultado.

Instru mento	**Ampere**	
1	0.63	0.01
2	0.641	0.011
3	0.675	0.03
4	0.7	0.051
5	0.642	0.011
6	0.631	0.021

Calcule:

- El valor representativo de la corriente del circuito, teniendo en cuenta los diferentes instrumentos de donde provienen. Estime su error.

$$\boxed{p_j = \frac{1/\sigma^2_{\tilde{\mu}_i}}{\sum_{j=1}^{t} 1/\sigma^2_{\tilde{\mu}_i}}}$$

$$\boxed{\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{t} p_i \tilde{\mu}_i = \mathbf{0.639}}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{t} \left[p_i \breve{\sigma}_i^2 + p_i (\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu})^2 \right] \Rightarrow \tilde{\sigma} = \mathbf{0.046}$$

$$\boxed{\widetilde{\sigma^2_{\tilde{\mu}}} = \sum_{i=1}^{t} p_i^2 \ \widetilde{\sigma_{\tilde{\mu}_i}}^2 = \Rightarrow \widetilde{\sigma_{\tilde{\mu}}} = \mathbf{0.006}}$$

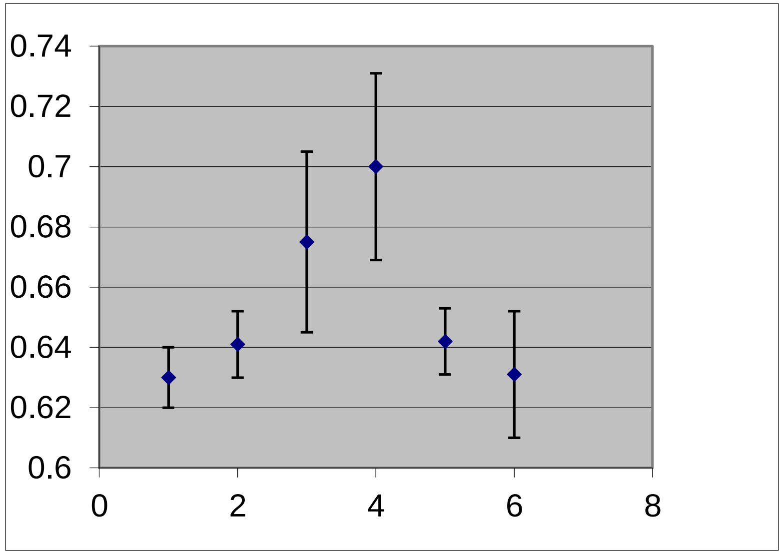
$$\widetilde{\sigma^2_{\tilde{\mu}}} = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t} p_i (\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu})^2 \text{ (Acuerdo externo)} \Rightarrow \widetilde{\sigma^{AE}_{\tilde{\mu}}} = \mathbf{0.005}$$

Observaciones directas

Finalmente:

$$\tilde{x} = \left(A^T P A\right)^{-1} A^T P \mathbf{y}$$

$$C_{\tilde{x}} = \left(A^T C_{\mathbf{y}} A\right)^{-1}$$



$$\tilde{x} = \left(A^T P A\right)^{-1} A^T P \mathbf{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i / \sigma_{y_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} 1 / \sigma_{y_i}^2} = 0.639$$

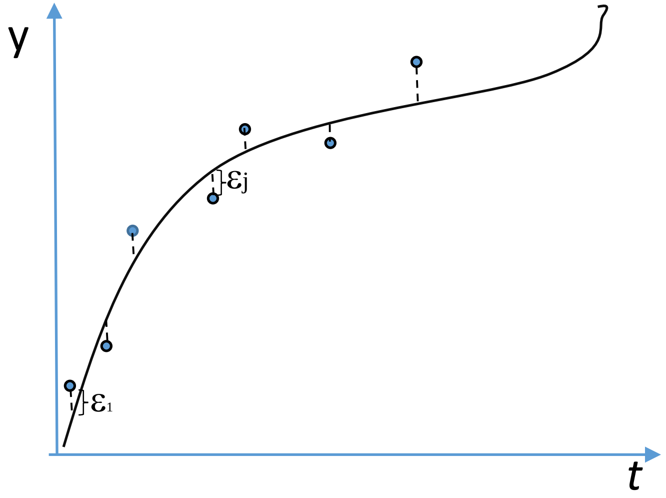
$$C_{\tilde{x}} = \left(A^T C_{\mathbf{y}} A\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} 1 / \sigma_{y_i}^2\right)^{-1} = 0.006$$

2) Solución de nuestro problema de observaciones directas?
Es equivalente a la solución que nos brinda mínimos cuadrados observaciones directas.

Mínimos cuadrados

Es una técnica de optimización matemática que dada una serie de mediciones, intenta encontrar una función que se aproxime a los datos (o mejor ajuste)

Elegir un método donde ε_i sea lo *"mas chico posible"*



$$\boxed{\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\vec{e}^T P \, \vec{e} = mín}$$

Problemas a tratar:

a) Observaciones directas
b) Observaciones indirectas: i) Caso lineal y ii) Caso no-lineal

MAGGIA LABORATORIO

Observaciones indirectas: caso lineal

Ecuación de observación

$$y_j \quad = \quad \eta_j + \varepsilon_j$$ j=1,…,n

$$\boxed{\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{\varepsilon}}$$

Modelo determinista:

$$\eta_j = p_{j0} + p_{j1}x_1 + p_{j2}x_2 + \cdots + p_{jr}x_r$$

$$\boxed{x_i \; (i = 1, 2, \ldots, r)}$$

Son los parámetros incógnitas del problema

$$\vec{\eta} = \vec{p}_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nr} \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

A (Matriz de diseño)

$$\boxed{\vec{\eta} = \vec{p}_0 + \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}}$$

Observaciones indirectas: caso lineal

Ecuación de observación

$$\boxed{\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{\varepsilon}}$$

Modelo determinista:

$$\boxed{\vec{\eta} = \vec{p}_0 + \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{x_i \; (i = 1, 2, \ldots, r)}$$

Son los parámetros incógnitas del problema

Modelo estadístico: consideraciones sobre ε_j

- $E[\varepsilon_j]=0$
- $\begin{cases} E[\varepsilon_j \varepsilon_k] = 0 \\ E[\varepsilon_j{}^2] = \sigma_j^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbf{C}_{\vec{\varepsilon}} = \mathbf{C}_{\vec{y}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \sigma_0^2\, \mathbf{C}_{\vec{y}}^{-1}$$

Observaciones indirectas: caso lineal

Ecuación de observación:

$$\overrightarrow{y'} = \vec{y} - \overrightarrow{p_0} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{\varepsilon}$$

Condición sobre los errores que definen al método:

$$\vec{e}^{T} P \, \vec{e} = mín$$

SOLUCIÓN:

Finalmente tenemos el siguiente sistema:

Debemos minimizar $\vec{e}^{T} P \, \vec{e}$ sujeto a las n condiciones : $\vec{y}' = A\vec{x} + \vec{\varepsilon}$

Función Lagrangiana del problema:

$$\Delta = \vec{\varepsilon}^{T} P \vec{\varepsilon} - 2k^{T}\left(\mathbf{y'} \text{-} \vec{\varepsilon} - Ax\right) = \min \longrightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial x} dx + \frac{\partial \Delta}{\partial \vec{\varepsilon}} d\vec{\varepsilon} + \frac{\partial \Delta}{\partial \vec{k}} d\vec{k} = 0$$

MAGGIA LABORATORIO

Observaciones indirectas: caso lineal

Ecuación de observación

$$\boxed{\overrightarrow{y'} = \vec{y} - \overrightarrow{p_0} = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{\varepsilon}}$$

Modelo determinista:

$$\vec{\eta} = \vec{p}_0 + \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$

$$x_i \; (i = 1, 2, \ldots, r)$$

Modelo estadístico: consideraciones sobre ε_j

- $E[\varepsilon_j]=0$
- $\begin{cases} E[\varepsilon_j \varepsilon_k] = 0 \\ E[{\varepsilon_j}^2] = \sigma_j^2 \end{cases}$

Condición sobre los errores que definen al método: $\boxed{\vec{e}^T P \, \vec{e}}$

Finalmente:

$$\tilde{\mathrm{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{P}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathrm{y}'$$

$$\mathrm{C}_{\tilde{\mathrm{x}}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_{\mathbf{y}'}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}$$

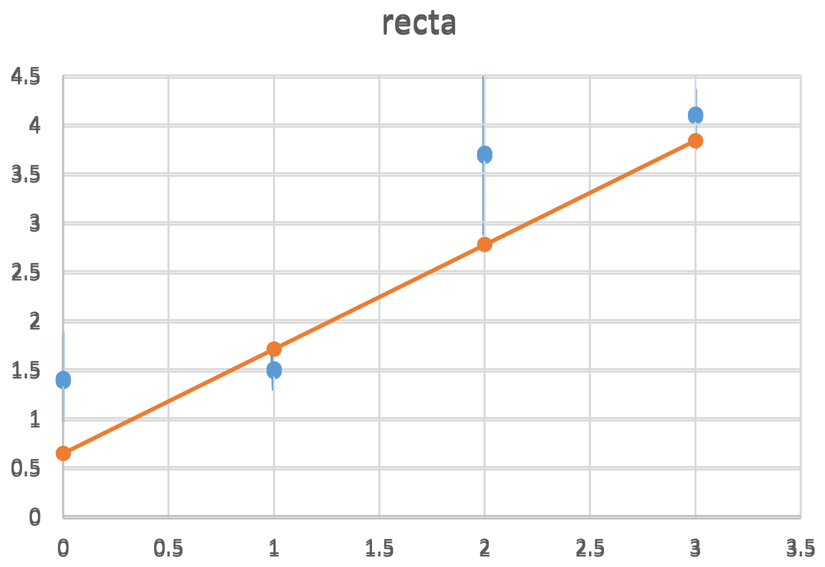
Observaciones indirectas: caso lineal
Ejemplo

t	Y(m)	σy ´(m)
0	1,40	0,50
1	1,51	0,21
2	3,71	1.00
3	4,11	0,51

$$\tilde{\vec{x}} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}\, \vec{y}'$$

$$\tilde{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 0.636 \\ 1.065 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\eta_j = 0.636 + 1.065\, t_j}$$



$$\tilde{\eta}_j \rightarrow \begin{pmatrix} 0.636 \\ 1.702 \\ 2.768 \\ 3.834 \end{pmatrix}$$

Comentario:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow y_i = x_1 + t_i\ x_2 \text{ (i=1,...,4)}$$

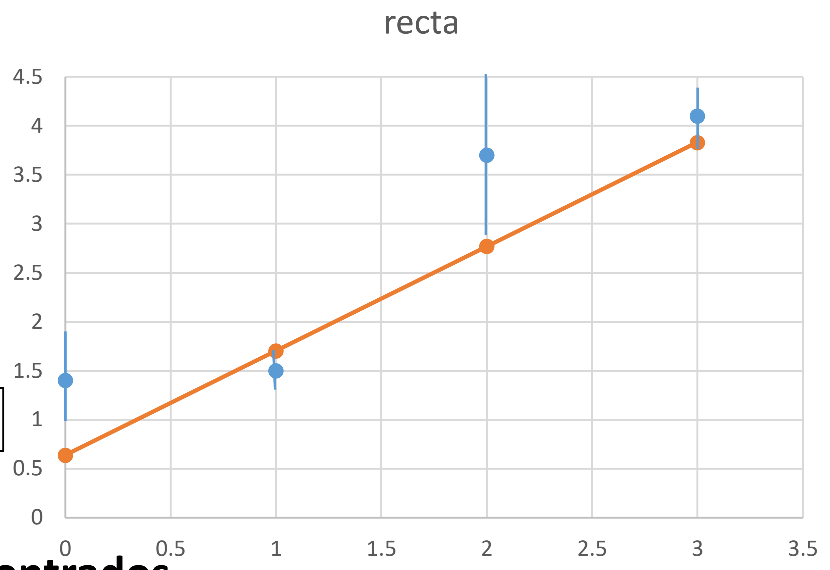
$$C_y = \begin{bmatrix} (0.5)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & (0.51)^2 \end{bmatrix}$$

Observaciones indirectas: caso lineal
Ejemplo

t	y	σy
0	1,40	0,50
1	1,51	0,21
2	3,71	1.00
3	4,11	0,51

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\,\vec{\mathbf{y}}'$$

$$\boxed{\eta_j = 0.636 + 1.065\, t_j}$$

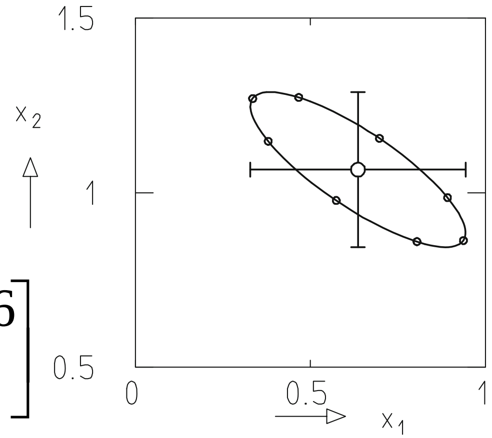


Elipse de covarianza de los parámetros encontrados.

$$C_{\tilde{\mathbf{x}}} = \left(\mathbf{A}^{T} C_{\mathbf{y}'}^{-1} \mathbf{A}\right)^{-1}$$

$$C_{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0.0943 & -0.0566 \\ -0.0566 & 0.0494 \end{bmatrix}$$



$$\tan 2\alpha = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \quad ,$$

$$p_1^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_2^2\cos^2\alpha - 2\rho\sigma_1\sigma_2\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_1^2\sin^2\alpha} \quad ,$$

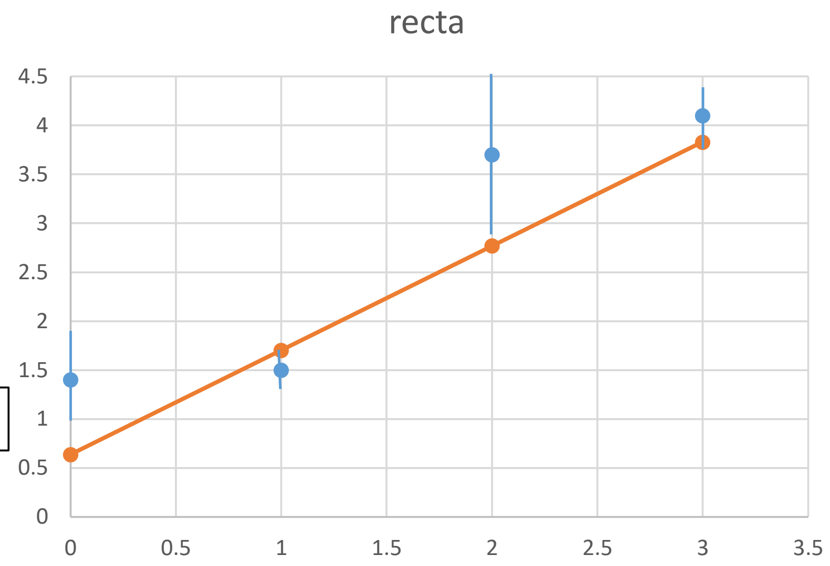
$$p_2^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_2^2\sin^2\alpha + 2\rho\sigma_1\sigma_2\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_1^2\cos^2\alpha} \quad .$$

Observaciones indirectas: caso lineal
Ejemplo

t	y	σy
0	1,40	0,50
1	1,51	0,21
2	3,71	1.00
3	4,11	0,51

$$\tilde{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\,\vec{\mathbf{y}}'$$

$$\boxed{\eta_j = 0.636 + 1.065\; t_j}$$



Chi-cuadrado

$$= \sum_{j=1}^{4}\left(\frac{y_j - \eta_j}{\sigma_j}\right)^2 = 4.507$$

Grados de libertad: n-r

¿ Cómo puedo evaluar la calidad del ajuste?

Observaciones indirectas: caso lineal

Ejemplo

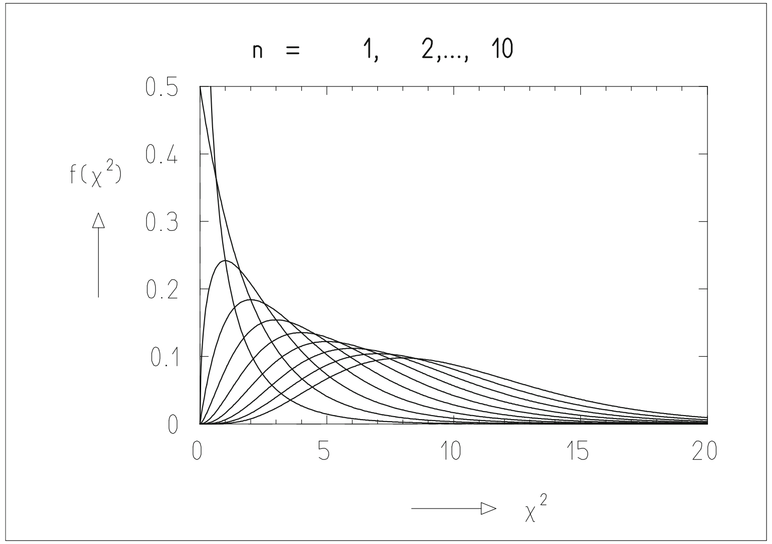


Fig. 6.8: Probability density of χ^2 for the number of degrees of freedom $n = 1, 2, \ldots, 10$. The expectation value $E(\chi^2) = n$ moves to the right as n increases.

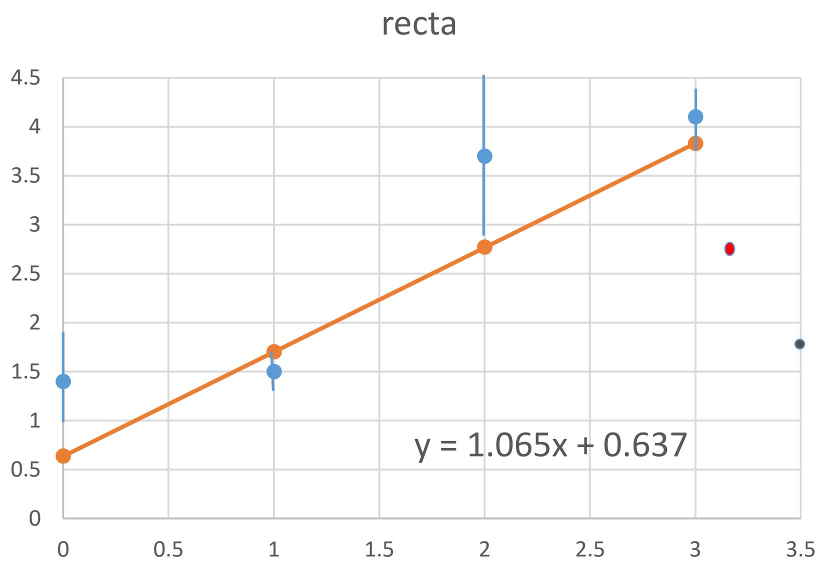
Table I.7: Quantiles χ_P^2 of the χ^2-distribution.

$$P = \int_0^{\chi_P^2} f(\chi^2; f)\,\mathrm{d}\chi^2$$

	P				
f	0.900	0.950	0.990	0.995	0.999
1	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828
2	4.605	5.991	9.210	10.597	13.816
3	6.251	7.815	11.345	12.838	16.266
4	7.779	9.488	13.277	14.860	18.467
5	9.236	11.070	15.086	16.750	20.515
6	10.645	12.592	16.812	18.548	22.458
7	12.017	14.067	18.475	20.278	24.322
8	13.362	15.507	20.090	21.955	26.124
9	14.684	16.919	21.666	23.589	27.877
10	15.987	18.307	23.209	25.188	29.588
11	17.275	19.675	24.725	26.757	31.264
12	18.549	21.026	26.217	28.300	32.909
13	19.812	22.362	27.688	29.819	34.528
14	21.064	23.685	29.141	31.319	36.123
15	22.307	24.996	30.578	32.801	37.697
16	23.542	26.296	32.000	34.267	39.252
17	24.769	27.587	33.409	35.718	40.790
18	25.989	28.869	34.805	37.156	42.312
19	27.204	30.144	36.191	38.582	43.820
20	28.412	31.410	37.566	39.997	45.315
30	40.256	43.773	50.892	53.672	59.703
40	51.805	55.758	63.691	66.766	73.402
50	63.167	67.505	76.154	79.490	86.661
60	74.397	79.082	88.379	91.952	99.607
70	85.527	90.531	100.425	104.215	112.317
80	80.000	101.879	112.329	116.321	124.839
90	107.565	113.145	124.116	128.299	137.208
100	118.498	124.342	135.807	140.169	149.449

Observaciones indirectas: caso lineal

t	y	σy
0	1,4	0,5
1	1,5	0,2
2	3,7	1
3	4,1	0,5



$$\tilde{h}_j \longrightarrow \begin{pmatrix} 0.636 \\ 1.702 \\ 2.768 \\ 3.834 \end{pmatrix}$$

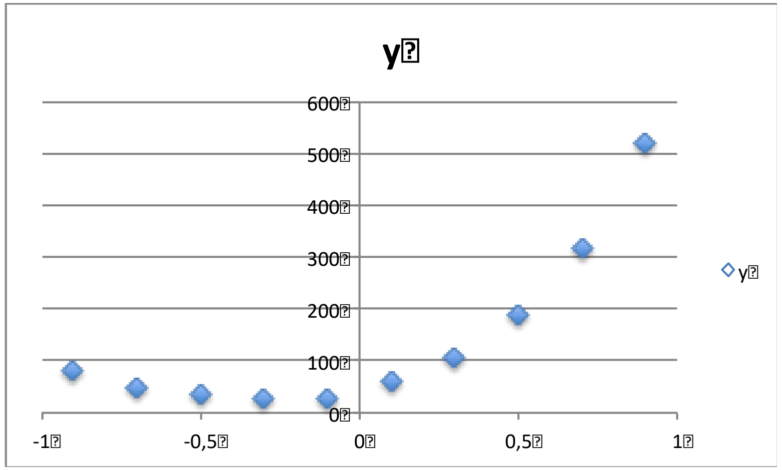
Si el modelo es que en todos los instantes mido lo mismo: $x = 2{,}67$ *(promedio pesado 1,86)*

Observaciones indirectas: caso lineal

Otro ejemplo:

j	$t_j = \cos\Theta_j$	y_j
1	-0.9	81
2	-0.7	50
3	-0.5	35
4	-0.3	27
5	-0.1	26
6	0.1	60
7	0.3	106
8	0.5	189
9	0.7	318
10	0.9	520

$$\sigma_j = \sqrt{y_j}.$$



$$\eta_j = h_j = x_1 + x_2 t_j + x_3 t_j^2 + \cdots + x_r t_j^{r-1}$$

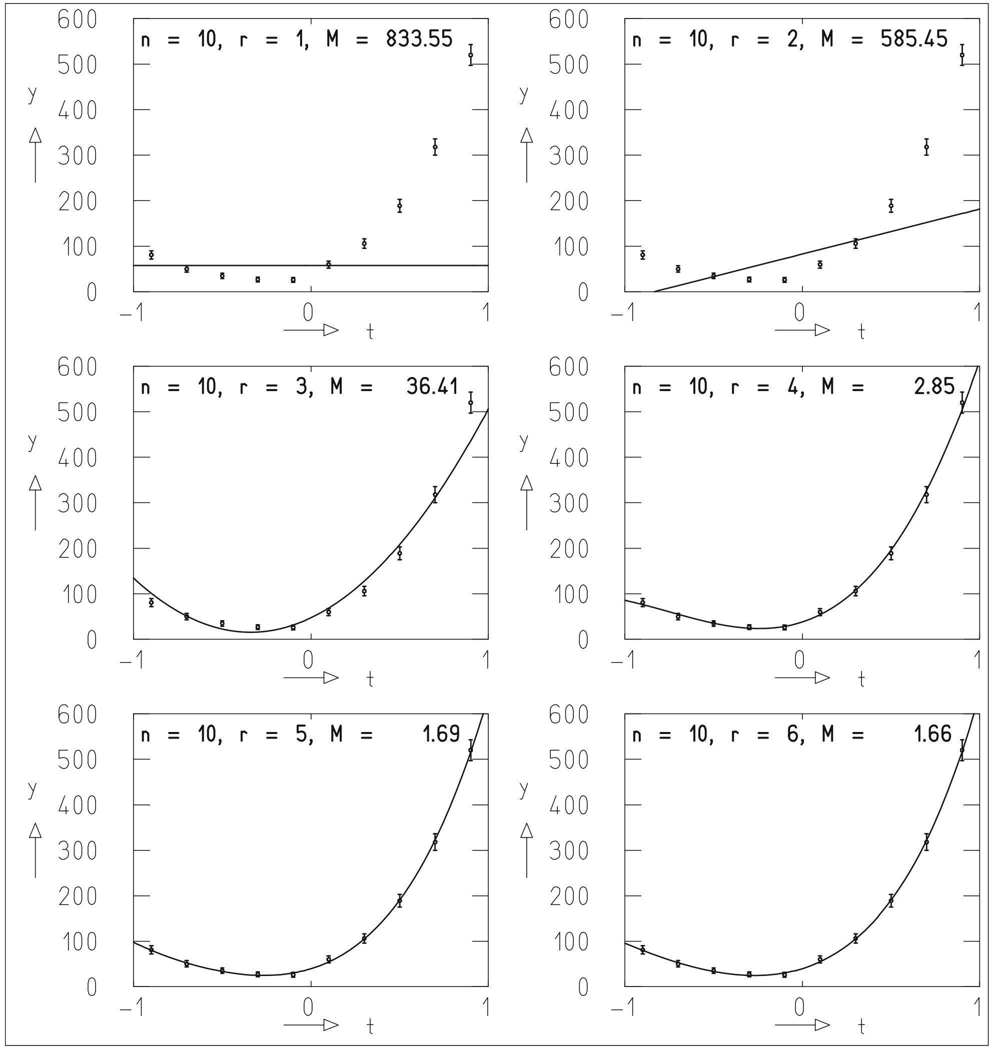
r=0 $\qquad \eta_j = h_j = x_1$

r=1 $\qquad \eta_j = h_j = x_1 + x_2 t_j$

r=2 $\qquad \eta_j = h_j = x_1 + x_2 t_j + x_3 t_j^2$

Observaciones indirectas: caso lineal

r	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	f	M
1	57.85						9	833.55
2	82.66	99.10					8	585.45
3	47.27	185.96	273.61				7	36.41
4	37.94	126.55	312.02	137.59			6	2.85
5	39.62	119.10	276.49	151.91	52.60		5	1.68
6	39.88	121.39	273.19	136.58	56.90	16.72	4	1.66



Chi-cuadrado

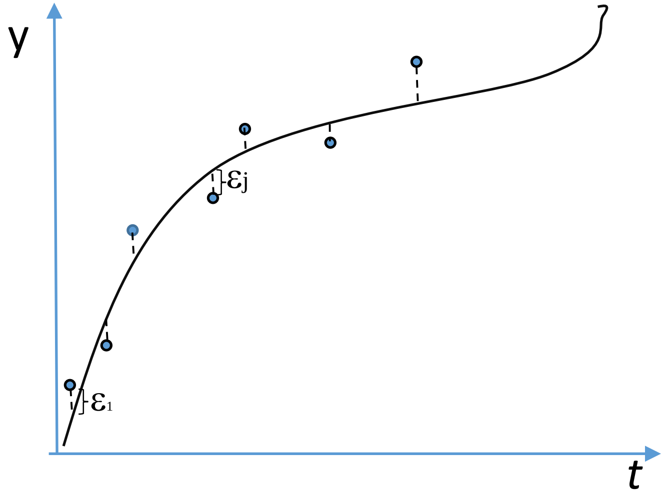
$$= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{y_{j-\eta_j}}{\sigma_j} \right)^2$$

Grados de libertad: n-r

Mínimos cuadrados

Es una técnica de optimización matemática que dada una serie de mediciones, intenta encontrar una función que se aproxime a los datos (o mejor ajuste)

Elegir un método donde ε_i sea lo *"mas chico posible"*



$$\boxed{\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{\varepsilon}}$$

$$\boxed{\vec{e}^T P \vec{e} = mín}$$

Problemas a tratar:

a) Observaciones directas
b) Observaciones indirectas: i) Caso lineal y ii) Caso no-lineal

MAGGIA LABORATORIO

Observaciones indirectas: caso no- lineal

Ecuación de observación

$$\boxed{\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{\varepsilon}} \qquad y_j = \eta_j + \varepsilon_j \qquad \text{j=1,…,n}$$

Modelo determinista:

$$\eta_j = h(x_1, \cdots, x_r) \qquad x_i \; (i = 1, 2, \ldots, r)$$

Son los parámetros incógnitas de mi problema

$$\eta_j = \eta_0(x_{10}, \cdots, x_{p0}) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right)_{\vec{x}_0} (x_1 - x_{10}) + \cdots + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_p}\right)_{\vec{x}_0} (x_p - x_{p0}) + TOS$$

, TOS: Término de Orden Superior

Para que TOS sea próximo a cero, DEBO elegir con cuidado los valores a-priori: $\vec{x}_0$

A

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_0 + A\,\delta\vec{x}$$

$$\vec{y} = \vec{\eta} + \vec{e}$$

$$\vec{y} - \vec{\eta}_0 = \vec{y}\,' = A\,\delta\vec{x} + \vec{e}$$

Observaciones indirectas: Caso no-lineal

Ecuación de observación:

$$\vec{y}' = A\delta\vec{x} + \vec{\varepsilon}$$

Modelo estadístico: consideraciones sobre εj

- $E[\varepsilon_j]$=0
- $\begin{cases} E[\varepsilon_j \varepsilon_k] = 0 \\ E[{\varepsilon_j}^2] = \sigma_j^2 \end{cases}$

$$\mathbf{C}_{\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{C}_{\vec{\boldsymbol{y}}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{P} = \sigma_0^2\, \mathbf{C}_{\vec{\boldsymbol{y}}}^{-1}$$

Observaciones indirectas: caso no-lineal

Ecuación de observación:

$$\boxed{\overrightarrow{y'} = \vec{y} - \overrightarrow{h_0} = A\delta\vec{x} + \vec{\varepsilon}}$$

Condición sobre los errores que definen al método:

$$\vec{e}^{T} P \vec{e} = mín$$

SOLUCIÓN:

Finalmente tenemos el siguiente sistema:

Debemos minimizar $\vec{e}^{T} P \vec{e}$ sujeto a las n condiciones : $\vec{y} = A\delta\vec{x} + \vec{\varepsilon}$

Función Lagrangiana del problema:

$$\Delta = \vec{\varepsilon}^{T} P \vec{\varepsilon} - 2\vec{k}^{T}\left(\mathbf{y}' - \vec{\varepsilon} - A\delta\vec{x}\right) = \min \longrightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial x} d\delta\vec{x} + \frac{\partial \Delta}{\partial \vec{\varepsilon}} d\vec{\varepsilon} + \frac{\partial \Delta}{\partial \vec{k}} d\vec{k} = 0$$

MAGGIA
LABORATORIO

Observaciones indirectas: caso no-lineal

Ecuación de observación:

$$\boxed{\overrightarrow{y'} = \vec{y} - \overrightarrow{h_0} = A\delta\vec{x} + \vec{\varepsilon}}$$

Condición sobre los errores que definen al método:

$$\vec{e}^T P \, \vec{e} = mín$$

Solución:

$$\boxed{\begin{aligned} d\vec{x} &= \left(A^T P A\right)^{-1} A^T P \, \vec{y}' \\ C_{d\vec{x}} &= \left(A^T C_{\vec{y}'} A\right)^{-1} \end{aligned}}$$

Proceso Iterativo de corrección de los parámetros iniciales hasta una tolerancia. Repto la instancia A.

Observaciones indirectas: Caso no-lineal

MAGGIA LABORATORIO

Ejemplo: Se tiene 20 valores de Y en función de X.

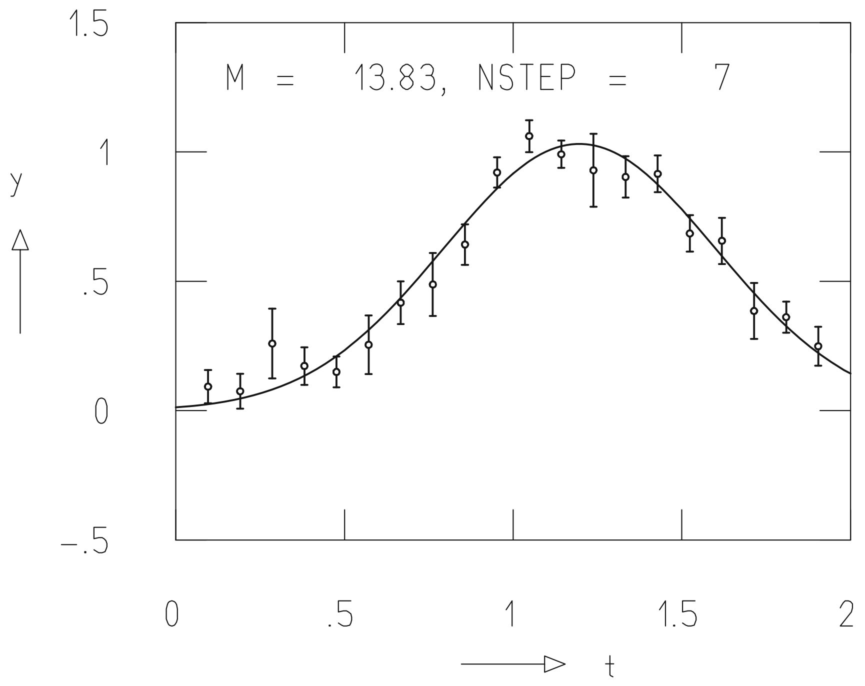
$$\vec{y} = \vec{h} + \vec{e}$$

$$\vec{y} - \vec{h}_0 = \vec{y}' = A\,d\vec{x} + \vec{e}$$

Modelo determinista:

$$x_1 \exp(-(t - x_2)^2 / 2x_3^2)$$

$$a_{j\ell} = \left(\frac{\partial h_j}{\partial x_\ell}\right)_{\mathbf{x}_0} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{pmatrix}$$



Modelo estadístico:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_j) &= 0 \\ E(\varepsilon_j^2) &= \sigma_j^2 : \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{y} = \vec{h} + \vec{e} \\ &\vec{y} - \vec{h}_0 = \vec{y}' = A\,d\vec{x} + \vec{e} \end{aligned}}$$

Observaciones indirectas: Caso no-lineal

Ejemplo: Se tiene 20 valores de Y en función de X.

$$\vec{y} = \vec{h} + \vec{e}$$

$$\vec{y} - \vec{h}_0 = \vec{y}' = A\,d\vec{x} + \vec{e}$$

$$x_{10} = 0.6; x_{20} = 1,4; x_{30} = 0,3$$

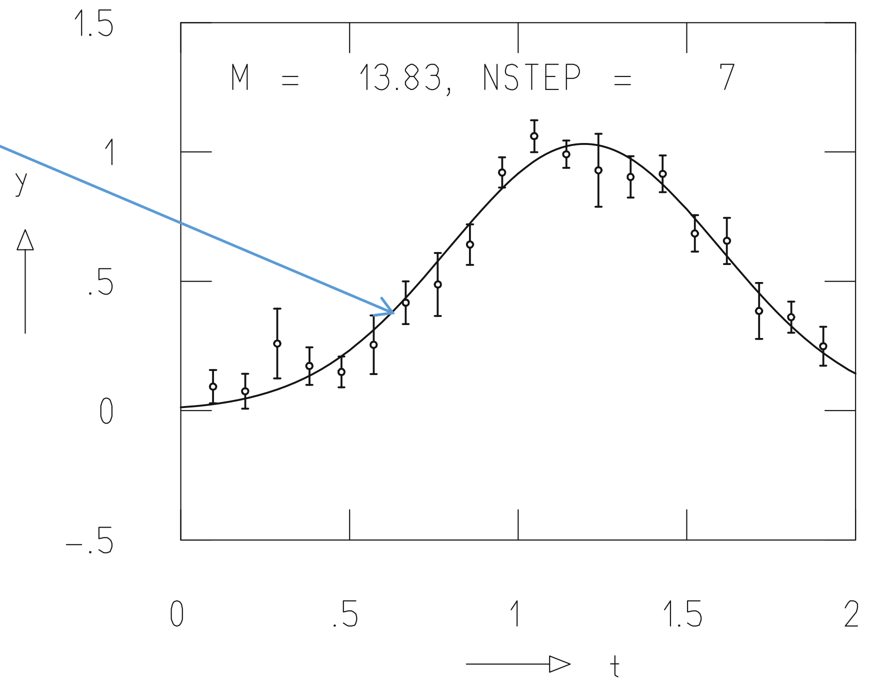
7 iteraciones

$$x_1 = 1; x_2 = 1.2; x_3 = 0,4$$

$$x_1 \exp(-(t - x_2)^2 / 2x_3^2)$$

$$d\vec{x} = \left(A^T P A\right)^{-1} A^T P \vec{y}'$$

$$C_{d\vec{x}} = \left(A^T C_{\vec{y}'} A\right)^{-1}$$



MAGGIA
LABORATORIO

Mínimos cuadrados

Comentarios Generales:

- Matriz de diseño A debe estar bien condicionada.
- Matriz de var-cov realista??
- Para el caso de Obs. Directa y Obs. Indirecta-lineal: solución exacta para una dada muestra.
- Para el caso de Obs. Indirecta-no lineal: solución iterativa y no necesaria es la misma para una muestra dada (dependencia de las condiciones iniciales)
- Siempre analizar los residuos “visualmente” y en forma “cuantificada”.