Función de distribución de probabilidades especiales: función de densidad Uniforme

$$\begin{cases} f(x) = c \quad , \qquad a \le x < b \quad , \\ f(x) = 0 \quad , \qquad x < a \quad , \qquad x \ge b \end{cases}$$

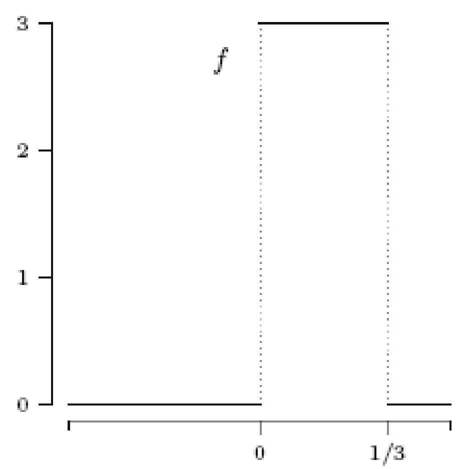
Condición de probabilidad sobre todos los casos posibles:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b \mathrm{d}x = c(b-a) = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \qquad a \le x < b \quad ,$$

$$f(x) = 0 \quad , \qquad x < a \quad , \qquad x \ge b$$

Ejemplo:

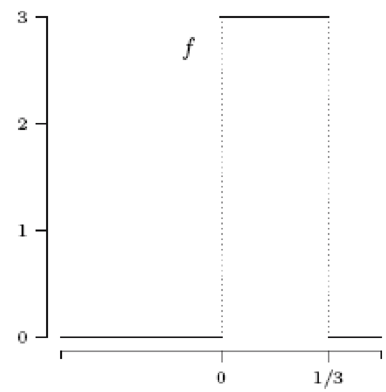


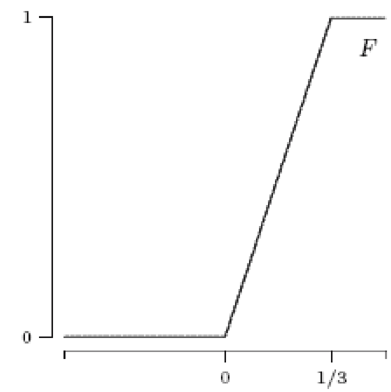
- Función de distribucion de probabilidades especiales: función de densidad Uniforme

$$F(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} \quad , \qquad a \leq x < b$$

$$F(x) = 0 \quad , \qquad x < a \quad ,$$

$$F(x) = 1 \quad , \qquad x \geq b \quad .$$





Parámetro media y varianza:

$$E(\mathsf{x}) = \widehat{x} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{(b-a)}(b^2-a^2) = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma^2(\mathsf{x}) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

METODO DE MONTECARLO

Clase adicional: Estadística Aplicada

MAGGIA LABORATORIO

EL MÉTODO DE MONTECARLO:

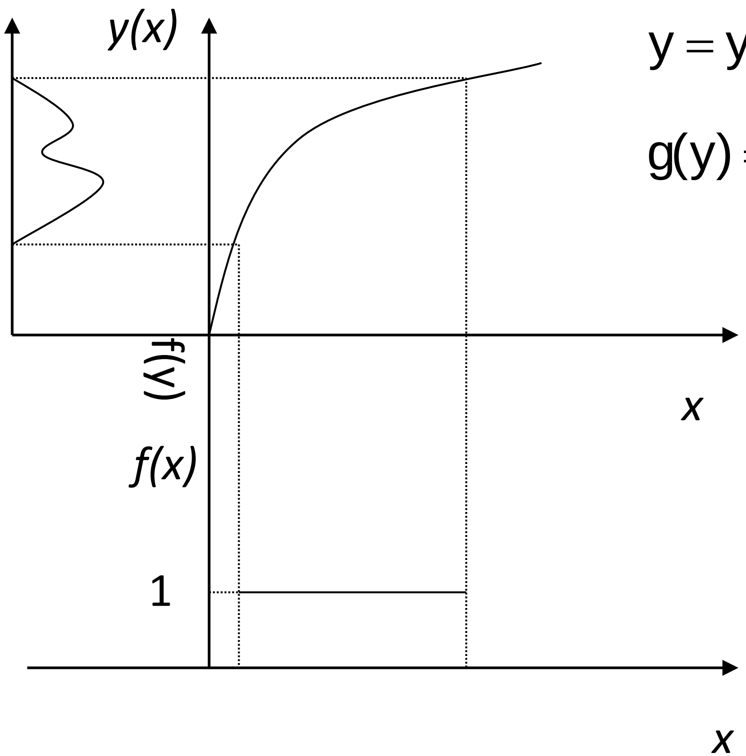
La función de distribución uniforme es en sí misma de muy poca aplicación práctica, pero muy conveniente para el cálculo.
Es decir es muy conveniente transformar una distribución dada en una uniforme y viceversa. De esta manera obtener la distribución por transformación de variable a partir de la distribución uniforme.

El método es util principalmente en las **aplicaciones numéricas**

SIMULACIÓN

OBJETIVO: Deseamos generar una variablealeatoria que tenga una f.d.p asociada diferente a la uniforme.

Obtenemos la distribución de una variable aleatorio utilizando el concepto de transformación de variable a partir de la distribución uniforme



$$y = y(x)$$

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \quad \rightarrow \quad g(y) = \left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad 0 \le x \le 1$$

$$= 0 \qquad \text{resto}$$

$$y = y(x)$$

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \rightarrow g(y) = \left|\frac{dx}{dy}\right| \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0 \quad \text{resto}$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(x')\, dx' = \int_{-\infty}^{y} g(y')\, dy'$$

$$\int_{0}^{x} 1\, dx = G(y) \quad \Rightarrow \quad x = G(y)$$

Finalmente:

$$y = G^{-1}(x)$$

La variable y tedrá la f.d..p g(y) y podemos expresar a y en función de la variable x…..

¿Cómo podemos simular la variable x de manera de cumplir con nuestro objetivo?

<u>Numeros uniformemente distribuidos</u>:
Un problema básico que nos encontramos habitualmente es el de obtener secuencias de números uniformemente distribuidos en un intervalo [0, 1].

La diferentes posibilidades para resolver dicho problema son:
- Observar un proceso f´ısico tal como la desintegraci´on radiactiva, el ruido eléctrico ...;
- Mediante algoritmos de **generación de números aleatorios**

Generadores de Números Aleatorios
Las principales ventajas son:
- Rapidez
- Comodidad
- Reproducibilidad
- Portabilidad

Y la desventaja fundamental:
- Las secuencias obtenidas no son realmente aleatorias, ya que se obtienen con operaciones deterministas. Solo podemos obtener secuencias pseudo-aleatorias, que a su vez satisfacen algunos criterios de aleatoriedad adecuados.
Los números generados deben cumplir ciertas características para que sean válidos.

Los numeros generados deben cumplir ciertas características para que sean válidos:

1. Uniformemente distribuidos.
2. Estadísticamente independientes.
3. Su media debe ser estadísticamente igual a 1/2.
4. Su varianza debe ser estadísticamente igual a 1/12.
5. Su periodo o ciclo de vida debe ser largo.
6. Deben ser generados a través de un método rápido.
7. Generados a través de un método que no requiera mucha capacidad de almacenamiento de la computadora.

MAGGIA
LABORATORIO

Comentario:

En general los algoritmos utilizan relaciones de recurrencia del tipo
$N_i = Gen(N_{i-1})$
en el caso de recurrencia simple,

o bien
$N_i = Gen(N_{i-1}, \ldots, N_{i-k})$
para el caso de una recurrencia de orden k.

Siempre debemos dar: un valor inicial para comenzar el algoritmo (k valores para recurrencias de orden k).

Recordemos que lo que nos interesa para trabajar con un buen generador de números aleatorios es que la distribución de los números obtenidos tiene que ser uniforme, no deben de haber correlaciones entre los terminos de la secuencia, el periodo debe ser lo más largo posible.

Ejemplo:

$\mathrm{Gen}(N_{i-1}) = (5N_{i-1} + 13)\ mod 2^k$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$N_i = (5N_{i-1} + 13) \bmod 2^k,\ k = 12,\ 2^k = 4096$

$N_0 = 1 \quad \rightarrow x_0 = 1/4096$

$N_1 = 18 \quad \rightarrow x_1 = 18/4096$

$N_2 = 103, \quad \rightarrow x_2 = 103/4096$

....

otra secuencia:

$N_0 = 2000 \quad \rightarrow x_0 = 2000/4096$

$N_1 = 1821 \quad \rightarrow x_0 = 1821/4096$

MAGGIA
LABORATORIO

Finalmente y = $G^{-1}(x)$

La variable y tedrá la f.d.p g(y) y podemos expresar a y en función de la variable x.....
¿Cómo podemos simular la variable x de manera de cumplir con nuestro objetivo?

A la variable x, la podemos generar haciendo uso de un generador de números aleatorios

$$\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ejemplo:

Queremos generar una variable aleatoria t con distribución del tipo poissoniana (decaimiento de un nucleo radiativo):

$$g(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad t \geq 0$$

$$= 0, \qquad \text{resto}$$

$$x = G(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) dt' = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$t = -\tau \ln(1 - x)$$

x lo genero por medio de generadores numericos.

t: **variable aleatoria simulada**

Ejemplo: Funcion uniforme

La concentración de un contaminante se distribuye uniformemente en el interval 0 a 20 millones. Una concentración se considera tóxica a partir de 8 millones. a) ¿Cual es la probabilidad que al tomar una muestra esta resulte tóxica?

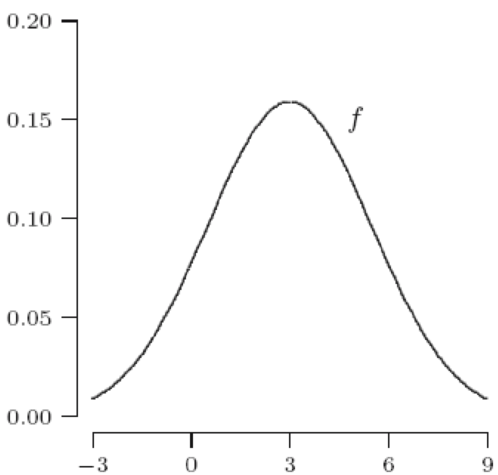
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20-0}, & 0 \le x \le 20 \\ 0, & resto \end{cases}$$

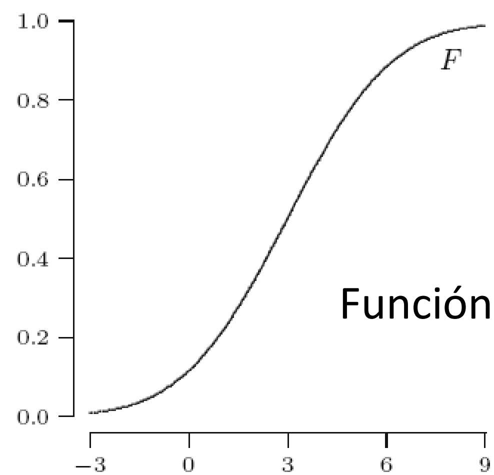
$$P(\mathrm{x} \ge 8) = \int_{8}^{20} \frac{1}{20} dx = 0.6$$

b) Cual es la probabilidad que la concentración sea de 10 millones?

Función de distribución de probabilidad especial: Función de densidad de probabilidad gaussiana

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,b} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right\} \qquad -\infty < x < \infty$$





Si $a=4$ y $b=2.5$

Función de distribución

Función de distribución de probabilidad especial: Función de densidad de probabilidad gaussiana

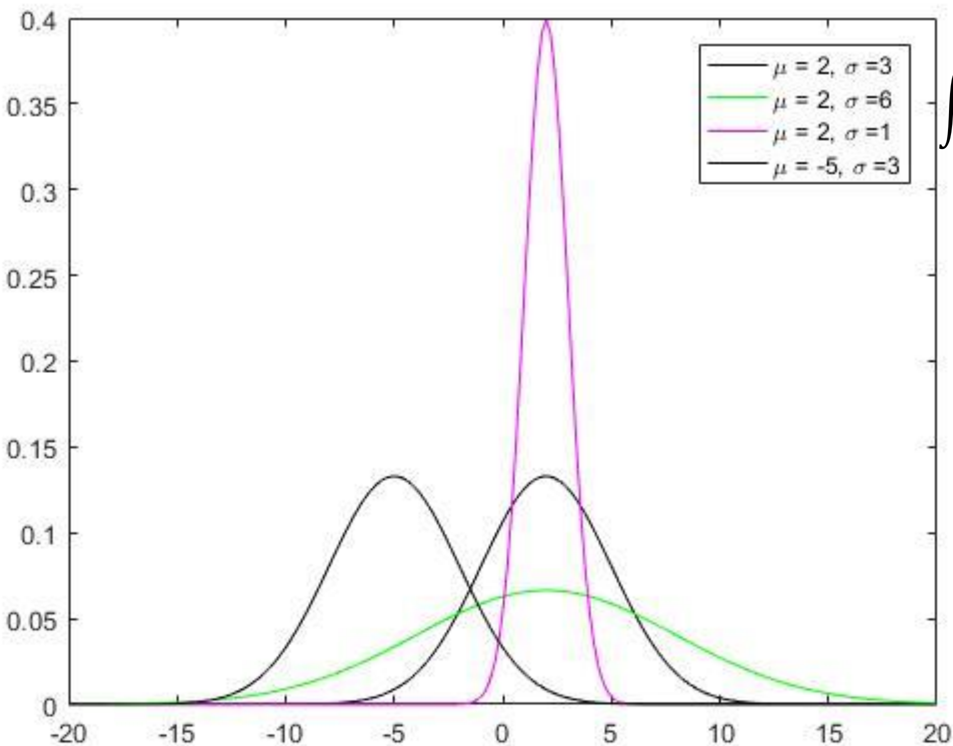
$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right\} \qquad -\infty < x < \infty$$

Si calculamos el $E(\mathrm{x})$ y el $E\left((\mathrm{x} - E(\mathrm{x}))^2\right)$ tomando como f.d.p la *f(x)* enunciada anteriormente. Nos queda:

$$\mu = a \quad , \qquad \sigma^2(\mathrm{x}) = b^2$$

Demostración: Proponga un cambio de variables, $z = {}^{(\mathrm{X}-\mu)}/_{\sigma}$ y tenga en cuenta que la integral definida: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz = \sqrt{2\pi}$. Para la varianza también debe hacer una integración por partes.

- Función de distribución de probabilidad especial: Función de densidad de probabilidad gaussiana



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 1$$

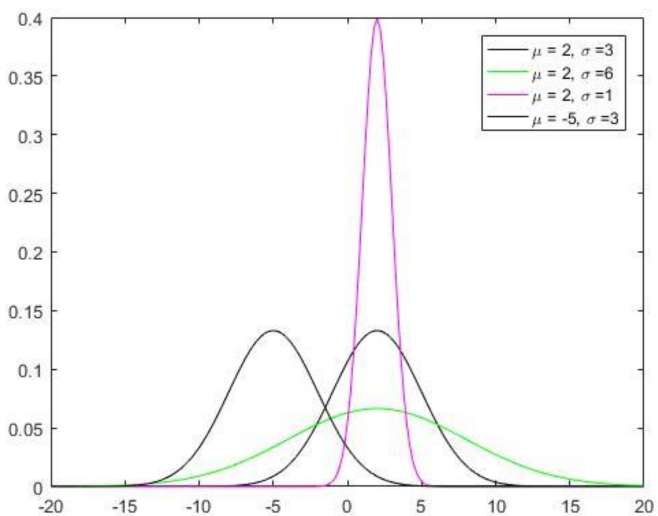
Función de distribución de probabilidad especial: Función de densidad de probabilidad gaussiana

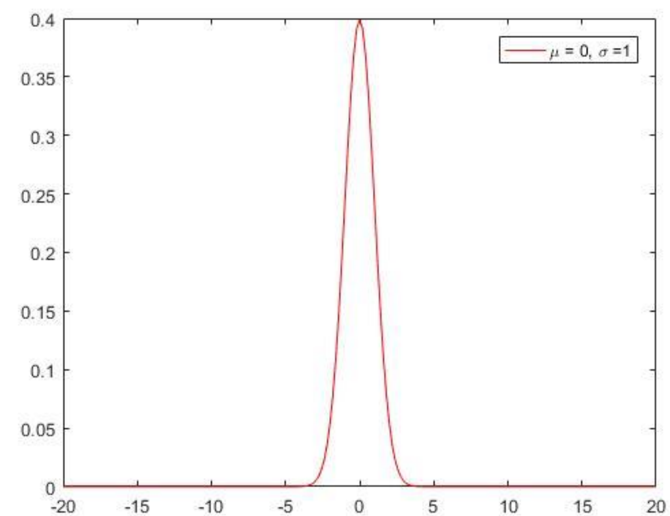
$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Estandarizando o normalizando la variable x

$$\varphi(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x'}{2}\right\}$$

Recordando que : $x' = \frac{x-a}{b}$





¿Qué tipo de transformación de variable es cuando convierto de x a x´? Cuales son las características?

MAGGIA
LABORATORIO

Ejemplo: En una ciudad se estima que la temperatura máxima del mes de junio sigue una distribución gaussiana, con media igual a 23° y desviación estándar 5°
Calcular el número de días del mes del mes en los que se espera alcanzar temperaturas máximas entre 21° y 27°.
Nota: Siempre es conveniente estandarizar o normalizar la variable aleatoria (pasar de x a x').
$\mathrm{x}' = \frac{\mathrm{x}-23}{5}$ donde x es la temperatura máxima del mes de junio.

Recordando la definición de probabilidad, debemos encontrar la probabilidad que x se encuentre entre 21° y 27° o lo que es lo mismo que x' se encuentre entre -0.4 y 0.8.

¿Porque utilizamos la variable estandarizada? Porque puedo encontrar mi respuesta en las tablas.

$$P(21° \leq \mathrm{x} \leq 27°) = P(-0.4 \leq \mathrm{x}' \leq 0.8) = \int_{-0.4}^{0.8} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x'}{2}\right\} dx'$$

Rta: $P(21° \leq \mathrm{x} \leq 27°)$=0.443, entonces el numero de días del mes de junio con ese ramgo de temperaturas máximas (teniendo en cuenta que junio tiene 30 días) será, 13 (aproximadamente)

Función de distribución de probabilidad especial: Función de densidad de probabilidad gaussiana

Table I.2: Normal distribution $\psi_0(x)$.

$$P(\mathsf{x} < x) = \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x$$

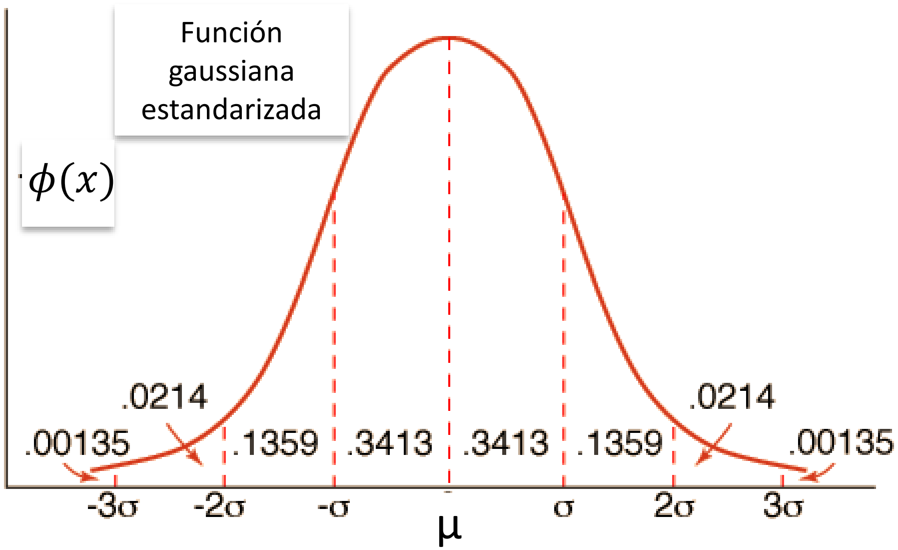
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
−2.9	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
−2.8	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
−2.7	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
−2.6	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
−2.5	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
−2.4	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006
−2.3	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008
−2.2	0.014	0.014	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011
−2.1	0.018	0.017	0.017	0.017	0.016	0.016	0.015	0.015	0.015	0.014
−2.0	0.023	0.022	0.022	0.021	0.021	0.020	0.020	0.019	0.019	0.018
−1.9	0.029	0.028	0.027	0.027	0.026	0.026	0.025	0.024	0.024	0.023
−1.8	0.036	0.035	0.034	0.034	0.033	0.032	0.031	0.031	0.030	0.029
−1.7	0.045	0.044	0.043	0.042	0.041	0.040	0.039	0.038	0.038	0.037
−1.6	0.055	0.054	0.053	0.052	0.051	0.049	0.048	0.047	0.046	0.046
−1.5	0.067	0.066	0.064	0.063	0.062	0.061	0.059	0.058	0.057	0.056
−1.4	0.081	0.079	0.078	0.076	0.075	0.074	0.072	0.071	0.069	0.068
−1.3	0.097	0.095	0.093	0.092	0.090	0.089	0.087	0.085	0.084	0.082
−1.2	0.115	0.113	0.111	0.109	0.107	0.106	0.104	0.102	0.100	0.099
−1.1	0.136	0.133	0.131	0.129	0.127	0.125	0.123	0.121	0.119	0.117
−1.0	0.159	0.156	0.154	0.152	0.149	0.147	0.145	0.142	0.140	0.138
−0.9	0.184	0.181	0.179	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161
−0.8	0.212	0.209	0.206	0.203	0.200	0.198	0.195	0.192	0.189	0.187
−0.7	0.242	0.239	0.236	0.233	0.230	0.227	0.224	0.221	0.218	0.215
−0.6	0.274	0.271	0.268	0.264	0.261	0.258	0.255	0.251	0.248	0.245
−0.5	0.309	0.305	0.302	0.298	0.295	0.291	0.288	0.284	0.281	0.278
−0.4	0.345	0.341	0.337	0.334	0.330	0.326	0.323	0.319	0.316	0.312
−0.3	0.382	0.378	0.374	0.371	0.367	0.363	0.359	0.356	0.352	0.348
−0.2	0.421	0.417	0.413	0.409	0.405	0.401	0.397	0.394	0.390	0.386
−0.1	0.460	0.456	0.452	0.448	0.444	0.440	0.436	0.433	0.429	0.425
0.0	0.500	0.496	0.492	0.488	0.484	0.480	0.476	0.472	0.468	0.464

Table I.2: (continued)

$$P(\mathsf{x} < x) = \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

Función de distribución de probabilidad especial: Función de densidad de probabilidad gaussiana



Importante:

$$P(|x-\mu| \leq \sigma) = 68.3\%$$
$$P(|x-\mu| \leq 2\sigma) = 95.4\%$$
$$P(|x-\mu| \leq 3\sigma) = 99.8\%$$

¿Qué significa?