Funciones de distribución especiales

Es una función que describe la probabilidad asociada a un resultado de un experimento aleatorio. Pueden ser discreta o continua.

<u>FUNCION DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES BINOMIAL</u>

Características que deben tener los experimentos que arrojan como resultado, variables aleatorias con distribución binomial.

a) Resultados posibles sólo 2: A y no A
b) El resultado de cada prueba es independiente.
c) La probabilidad de A es cte e igual a p
d) Existe un número fnito de n pruebas

Funciones de distribución especiales: Binomial

Definición de la variable aleatoria binomial: cuenta el numero de “exitos” en un total de n pruebas

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Donde x_i es igual a 1 si pasa A y 0 si pasa no A

Entonces la probabilidad Binomial es:

$$P(k) = W_k^n = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad .$$

P(k) es la probabilidad de k éxitos en un total de n pruebas, donde q=1-p

Funciones de distribución especiales: Binomial

Teniendo en cuenta que nuestra variable Binomial se define como: $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i$

¿ Cual es su valor medio y su varianza? Utilizaremos la definición de media y varianza.

Primero analicemos el experimento de muestra tamaño 1, que sería x_i es igual a 1 si pasa A y 0 si pasa no A, para i=1. Entonces para esa variable:

media= $E(\mathrm{x}_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q$

varianza=
$$\begin{aligned} \sigma^2(\mathrm{x}_i) &= E\{(x_i - p)^2\} = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q \\ \sigma^2(\mathrm{x}_i) &= pq \quad . \end{aligned}$$

Para la variable binomial x, definida como $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i$

Funciones de distribución especiales: Binomial

Media $\boxed{E\{\mathrm{x}\}=E\{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i\}=\sum_{i=1}^{n}E\{\mathrm{x}_i\}=np}$

Varianza $\sigma^2(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i)=\sum_{i=1}^{n}\sigma_{\mathrm{x}_i}^2+las\ sumas\ de\ las\ cov\left(\mathrm{x_j}\ \mathrm{x_k}\right)$, esta igualdad lo vimos al presentar la covarianza.

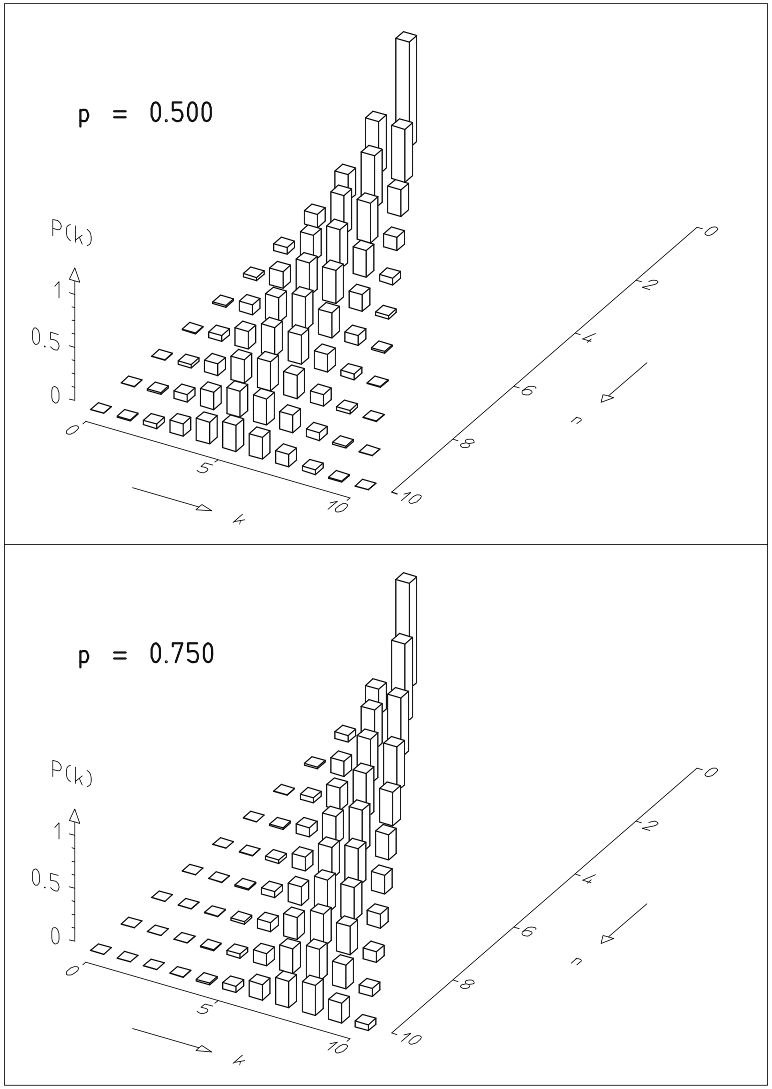
Nota: $\sigma^2(a\mathrm{x}+b\mathrm{y}) = a^2\,\mathrm{E}[(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2]+b^2\mathrm{E}[(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})^2]+2ab\,\mathrm{E}[(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})]$

Si x e y son independientes

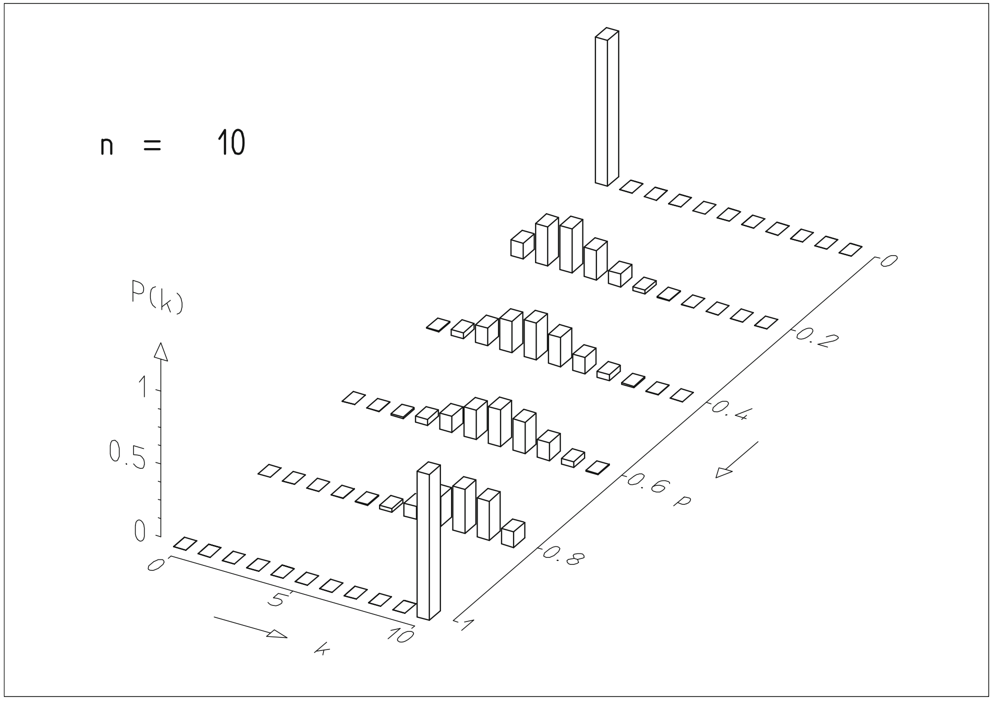
$$= a^2\,\mathrm{E}[(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2]+b^2\mathrm{E}[(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})^2]$$

Varianza $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{\mathrm{x}_i}^2=\sum_{i=1}^{n}pq=npq}$

Funciones de distribución especiales: Binomial



Funciones de distribución especiales: Binomial



Funciones de distribución especiales: Binomial

1. ¿Cuáles son los parámetros que definen a la función binomial?

2. Resuelva el siguiente ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 veces el número 6 en 100 tiradas de un dado (no cargado)?

P(x=5)=?

N=100
P=1/6

$P(x=5)=\binom{100}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{95}=0{,}00029$

Comentario: E(x)=np=100/6, del orden de 17, su probabilidad P(x=17)=0,106
σ^2(x)=npq=100*5/36 aproximadamente 14, la desv. estándar es 4

Funciones de distribución especiales: Binomial

1. Resuelva el siguiente ejemplo:

Se propone un examen que consiste en 25 preguntas, cada una tiene 5 opciones. Si un estudiante no conoce la respuesta correcta de ninguna pregunta y prueba con su suerte, calcular:

a) El número esperado de respuestas correctas.
b) Si un estudiante pasa cuando se responde correctamente 13 preguntas ¿Cuál es la probabilidad que pase el estudiante que probó suerte?

Respuesta: Probabilidad binomial donde $n=25$ y $p=0,2$ (o1/5)

a) $E(x)=np=25*1/5=5$, ya que 1/5 es la probabilidad asociada al acierto de la pregunta , sería 1 opción sobre 5 posibles. X= es la variable de aciertos sobre un total de 25 preguntas.
b) La probabilidad que pase el examen es $P(x \geq 13)=P(x=13)+P(x=14)+....+P(x=25)$

Funciones de distribución especiales: Multinomial

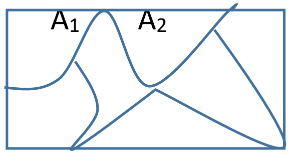
Sean una serie de eventos mutuamente excluyente que terminan definiendo todo los casos posibles de un experimento aleatorio.

$$E = A_1 + A_2 + \cdots + A_\ell$$

Sean A_i con i=1,...,l, l eventos mutuamente excluyentes

Donde:

$$P(A_j) = p_j \quad , \qquad \sum_{j=1}^{\ell} p_j = 1$$



La variable multinomial se expresa:

$$\mathrm{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_{ij}$$

X_{ij} que es igual a 1 si pasa A_j y 0 el resto; n es el numero total de pruebas

MAGGIA LABORATORIO

Funciones de distribución especiales: Multinomial

$\mathrm{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_{ij}$

X_{ij} que es igual a 1 si pasa A_j y 0 el resto; n es el numero total de pruebas

$\vec{\mathrm{x}} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_l)^T$

$$P(\mathrm{x}_1 = k_1, \mathrm{x}_2 = k_2, \dots, \mathrm{x}_l = k_l) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{\ell} k_j!} \prod_{j=1}^{\ell} p_j^{kj} \quad , \qquad \sum_{j=1}^{\ell} k_j = n$$

Parámetros que caracterizan a $\vec{\mathrm{x}}$ similar al caso de la binomial:

$E[\vec{\mathrm{x}}]$=n$\vec{p}$ $\quad \vec{p} = (p_1 \cdots, p_l)^T$ y $\quad \sigma^2(\mathrm{x}_j) = np_j(1 - p_j)$ con j=1 l

Como se trata de un vector de variables también debemos tener en cuenta la covarianza:

$cov(\mathrm{x}_i, \mathrm{x}_j) = -np_i p_j$ (i≠j)

Demostración: utilizamos una variable auxiliar $z = \mathrm{x}_i + \mathrm{x}_j$ cuyo $P(\mathrm{z}) = P(\mathrm{x}_i)$+ $P(\mathrm{x}_j)$, por ser cada variable del vector multinomial mutuamente excluyentes. Escribimos la varianza de z como: $E[(z - E(z))^2]$= $E\left[\left(\mathrm{x}_i + \mathrm{x}_j - E(\mathrm{x}_i) - E(\mathrm{x}_j)\right)^2\right]$ y como

= $nP(z)(1 - P(z)) =$ igualamos y nos queda la definición de covarianza.

Funciones de distribución especiales: Multinomial

Ley de los números grandes: frecuencia relativa de un evento sobre n experimentos.
Definimos h_j:

$$h_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{n} x_j$$

x_j numero de veces que sale el evento A_j

$$E(h_j) = \mu = E\left(\frac{x_j}{n}\right) = p_j$$

$$\sigma^2(h_j) = \sigma^2\left(\frac{x_j}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2(x_j) = \frac{1}{n} p_j (1 - p_j)$$

Cuando n tiende a infinito, la varianza o el error en h_j o la diferencia entre la frecuencia relativa y la probabilidad que pase A_j tiende a cero

Funciones de distribución especiales: Poissoniana

Origen **funcional** de la Poissoniana.

$$P(k) = W_k^n = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Binomial

n ➔ ∞
p ➔ 0
np = λ

$$\begin{aligned} P(k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k} . \end{aligned}$$

n ➔ ∞
p ➔ 0
np = λ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\boxed{P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}$$

Funciones de distribución especiales: Poissoniana

Origen funcional de la Poissoniana.

$$P(k) = W_k^n = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad . \quad \longrightarrow \quad = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Binomial

n $\rightarrow \infty$
p $\rightarrow 0$
np = λ

Cuyo valor esperado o media y varianza son:

$$E(\mathrm{k}) = \lambda$$

$$\sigma^2(\mathrm{k}) = \lambda$$

Nota: Para la demostración recurra a la definición de media y varianza de variables discretas y tenga en cuenta que k en Poisson va de 0 hasta infinito.

Funciones de distribución especiales: Poissoniana

Media

$$E(\mathrm{k}) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda\,\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$$

$$\boxed{E(\mathrm{k}) = \lambda}$$

Varianza

$$E(\mathrm{k}^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$
$$= \lambda\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda} = \lambda\left(\sum_{j=0}^{\infty} j\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda} + 1\right)$$

$$E(\mathrm{k}^2) = \lambda(\lambda+1)$$

Recordando:

$$\sigma^2 = E[(\mathrm{x}-\mu)^2] = E[\mathrm{x}^2\text{-}2\,\mathrm{x}\,\mu + \mu^2] = E[\mathrm{x}^2] - \mu^2$$

$$\sigma^2(\mathrm{k}) = E(\mathrm{k}^2) - \{E(\mathrm{k})\}^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2$$

$$\boxed{\sigma^2(\mathrm{k}) = \lambda}$$

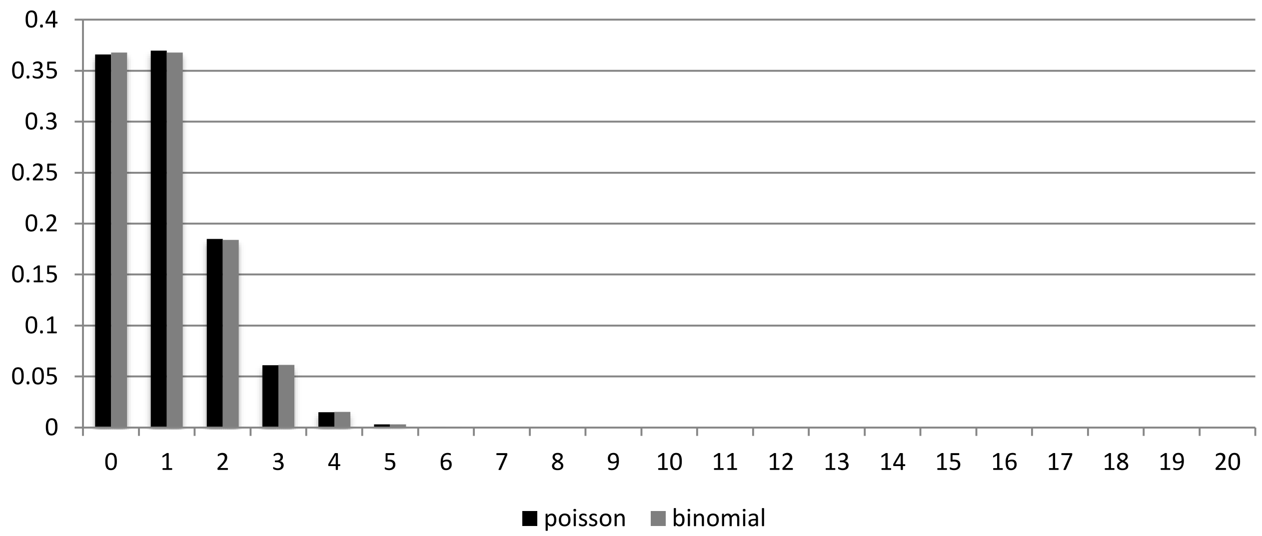
Funciones de distribución especiales: Poissoniana

Origen funcional de la Poissoniana.

$$P(k) = W_k^n = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \longrightarrow = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

n → ∞
p → 0
np = λ

np = λ= 1, n=100 y p=0.01



Funciones de distribución especiales: Poissoniana

Ejemplo: Sea una fabrica de globos. Se tiene que cada paquete de globos contiene 100 unidades, y la calidad de la misma es tal que la probabilidad de que un globo este pinchado por paquete es de 0,01. Usted cuenta con 1000 paquetes de esta fabrica los cuales puede abrir y examinar.

a) Cuál es la probabilidad que 5 globos estén pinchados en un paquete? Cuál es el valor esperado de globos pinchados por paquete?
b) Cómo haría usted para verificar la probabilidad de calidad que nos brinda en fabricante?
c) De qué otra manera puede responder el punto a)

Funciones de distribución especiales: Poissoniana

Ejemplo: Sea una fabrica de globos. Se tiene que cada paquete de globos contiene 100 unidades, y la calidad de la misma es tal que la probabilidad de que un globo este pinchado por paquete es de 0,01. Usted cuenta con 1000 paquetes de esta fabrica los cuales puede abrir y examinar.

a) Cuál es la probabilidad que 5 globos estén pinchados en un paquete? Cuál es el valor esperado de globos pinchados por paquete?

Rta:

N=100, A=globo pinchado, entonces P(A)=0.01.

Es una distribución Binomial, p=0.01 y n=100. Debo calcular P(k=5)=

Luego el valor esperado o medio binomial es =n*p=1

b) Cómo haría usted para verificar la probabilidad de calidad que nos brinda en fabricante?

Rta:

Tengo 1000 paquetes de 100 globos cada uno. Debo realizar el experimento que consistirá en abrir las 1000 bolsas y contar los globos pinchados por bolsa, para luego hacer un análisis de frecuencia relativa de k globlos pinchados por bolsa (numero de bolsas con k globos pinchados / numero total de bolsas)

Funciones de distribución especiales: Poissoniana

Ejemplo

b) Cómo haría usted para verificar la probabilidad de calidad que nos brinda en fabricante?

Rta:

Con la información realizo un "histograma"

x	Pe= prob empírica= P(x=xi)
0	P(x=0)=n(0)/1000
1	n(1)/1000
2	n(2)/1000
….	

E(x)=0*P(x=0)+1*P(x=1)+2*P(x=2)+…..

= valor esperado de globos pinchados por bolsa

$\mathrm{E(x)} = np$, por considerar binomial la situación de los globos pinchados por bolsa

c) De qué otra manera puede responder el punto a)

P(x=5)=?

Importante: puedo pensar este ejercicio como binomial o poissoniana porque tengo el control de las veces que NO para el evento A. Para responder b) NO hice uso de las veces que NO pasa A solo conté cuantas veces por paquete pasa A.

Funciones de distribución especiales: Poissoniana

Finalmente podemos enunciar las características de una distribución de probabilidad Poissoniana

a) El numero de éxitos que ocurren por unidad de ensayo/area/volumen/paquete/etc es aleatorio y de igual probabilidad de aparición.
b) Cada unidad de ensayo es independiente una de otra.
c) El valor esperado o medio por unidad de ensayo es proporcional al tamaño de la unidad de ensayo.
d) Uno o mas de los éxitos No pueden ser contados simultáneamente en mas de un ensayo.

$$\boxed{P(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

Ejemplo:

- Número de defectos en una tela por metro cuadrado.
- Número de aviones que aterrizan en un aeropuerto por día
- Número de bacterias por cm^2 de cultivo.
- Número de partículas alfa emitidas por una fuente radioactiva por minutos.

Funciones de distribución especiales: Poissoniana

Ejemplo:
La contaminación constituye un problema en la fabricación de discos de almacenamiento óptico. Estos discos presentan un valor medio de partículas de contaminación de 0.1 por centímetro cuadrado. El disco de trabajo tiene 100 cm cuad.
a)Encuentre la probabilidad de que ocurran 12 partículas de contaminación en este disco.
Debo calcular primero el parámetro de la función de distribución Poissoniana.....λ
E(x), valor esperado de X partículas por disco de almacenamiento, cuyo tamaño es 100 cm cuad (unidad de ensayo es el disco de trabajo); entonces E(x)=0.1*100 =10 partículas (este valor es por unidad que elija de ensayo)

P(x=k) $= \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ para k=12

b) Probabilidad que ocurra 0 partícula y mas de 2 partículas. ??