Transformación de variables para el caso de dos variables X e Y

Sean las variables u y v funciones deterministas de las variables aleatorias x e y, entonces las puedo escribir como: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Se sabe quela f.d.p de x e y es conocida $f(x, y)$

Cual será la f.d.p de u y v, $g(u, v)$?

Importante: Analicemos la relación areal entre ambos par de variables.

Condición de equidad en la probabilidad para encontrar la función de densidad de probabilidad de las nuevas variables u,v

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x} < \mathbf{x} \leq \boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx}, \boldsymbol{y} < \mathbf{y} \leq \boldsymbol{y} + \boldsymbol{dy}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u} < \mathbf{u} \leq \boldsymbol{u} + \boldsymbol{du}, \boldsymbol{v} < \mathbf{v} \leq \boldsymbol{v} + \boldsymbol{dv})$$

De acuerdo a nuestra gráfica de la presentación:

$$g(u,v)\, du\, dv = f(x,y)\, dA$$

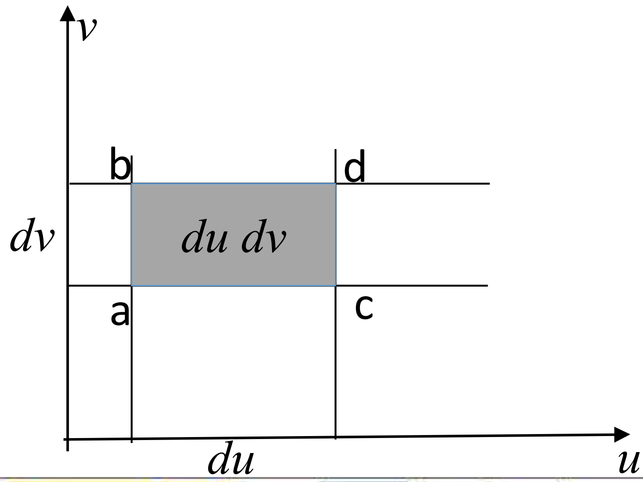
Transformación de variables para el caso de dos variables X e Y

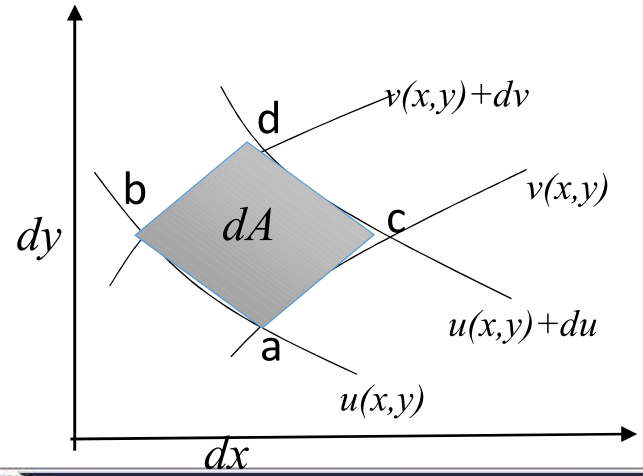
Sean las variables u y v funciones deterministas de las variables aleatorias x e y, entonces las puedo escribir como: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Se sabe quela f.d.p de x e y es conocida $f(x, y)$

Cual será la f.d.p de u y v, $g(u, v)$?

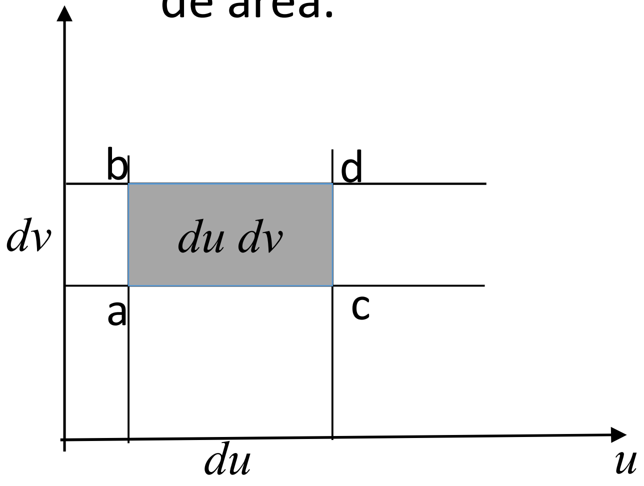
Importante: Analicemos la relación areal entre ambos par de variables.

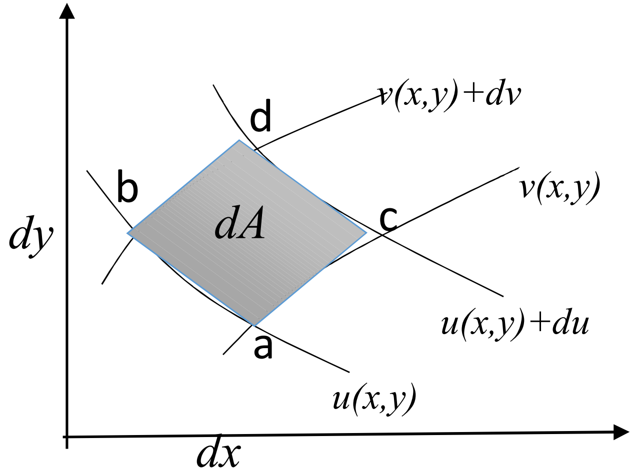




Transformación de variables para el caso de dos variables X e Y

- Escribamos las coordenadas del punto a, b y c en términos de diferencial de área.





$$x_a = x(u,v) \quad , \qquad y_a = y(u,v) \quad ,$$
$$x_b = x(u,v+\mathrm{d}v) \quad , \qquad y_b = y(u,v+\mathrm{d}v) \quad ,$$
$$x_c = x(u+\mathrm{d}u,v) \quad , \qquad y_c = y(u+\mathrm{d}u,v) \quad .$$

Finalmente:

$$x_b = x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v \quad , \qquad y_b = y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v$$
$$x_c = x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u \quad , \qquad y_c = y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u$$

Transformación de variables para el caso de dos variables X e Y

- Teniendo en cuenta que dA es un diferencial de paralelogramo utilizamos la ley de Lemha y Filès

$$\mathrm{d}A = \begin{vmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{vmatrix}$$

$$x_a = x(u,v) \quad , \qquad y_a = y(u,v) \quad ,$$

$$x_b = x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v \quad , \qquad y_b = y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v$$

$$x_c = x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u \quad , \qquad y_c = y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u$$

$$\boxed{= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

Transformación de variables para el caso de dos variables X e Y

$$\mathrm{d}A = J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Teniendo en cuenta que $g(u,v)\ du\ dv = f(x,y)\ dA$

Finalmente:

$$g(u,v) = f(x,y)\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right|$$

Caso de n variables aleatorias

$$\vec{\mathrm{x}} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \ldots, \mathrm{x}_n)^T$$

Función de distribución conjunta:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(\mathsf{x}_1 < x_1,\ \mathsf{x}_2 < x_2,\ \ldots, \mathsf{x}_n < x_n)$$

Función de densidad de probabilidad:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\, \partial x_2 \cdots \partial x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Función de densidad de probabilidad marginal

$$g_r(x_r) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{r-1}\, \mathrm{d}x_{r+1} \cdots \mathrm{d}x_n$$

Operador esperanza:

$$E\{H(\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$\begin{aligned} E(\mathsf{x}_r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_r\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\ E(\mathsf{x}_r) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_r\, g_r(x_r)\, \mathrm{d}x_r \quad . \end{aligned}$$

Caso de n variables aleatorias

Importante:
Si las variables son independientes:

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) g_2(x_2) \cdots g_n(x_n)}$$

Cómo definimos sus parámetros estadísticos que caracterizarían su comportamiento?

<u>Vector de media</u>, <u>varianza e información de la covarianza</u>

$$E[(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \ldots, \mathrm{x}_n)^T] = [E[\mathrm{x}_1], E[\mathrm{x}_2], \ldots, E[\mathrm{x}_n]]^T = \vec{\mu}$$

$$E[(\vec{\mathrm{x}} - \vec{\mu})(\vec{\mathrm{x}} - \vec{\mu})^T] = \begin{bmatrix} E[(\mathrm{x}_1 - \mu_1)^2] & \cdots & E[(\mathrm{x}_1 - \mu_1)(\mathrm{x}_n - \mu_n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(\mathrm{x}_n - \mu_n)(\mathrm{x}_1 - \mu_1)] & \cdots & E[(\mathrm{x}_n - \mu_n)^2] \end{bmatrix}$$

Caso de n variables aleatorias

Transformación de variables para el caso de n variables

$\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Si le aplicamos una función determinista y generamos n nuevas variables

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(\vec{\mathbf{x}}) \\ y_2 &= y_2(\vec{\mathbf{x}}) \\ &\vdots \\ y_n &= y_n(\vec{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

$$\boxed{g(\mathbf{y}) = \left| J\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right) \right| f(\mathbf{x})}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Transformación lineal y ortogonal. Regla de propagación de errores

Consideremos **r** funciones lineales de **n** variables $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

Con valor medio y matriz de var-cov, conocidos

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_1 + t_{11}x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1n}x_n \quad , \\
y_2 &= a_2 + t_{21}x_1 + t_{22}x_2 + \cdots + t_{2n}x_n \quad , \\
&\vdots \\
y_r &= a_r + t_{r1}x_1 + t_{r2}x_2 + \cdots + t_{rn}x_n \quad ,
\end{aligned}
$$

$\vec{\mathbf{y}} = T\vec{\mathbf{x}} + \mathbf{a}$ $\longrightarrow$ Cual es C_Y ?

Transformación lineal y ortogonal. Regla de propagación de errores

Consideremos **r** funciones lineales de **n** variables $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

Con valor medio y matriz de var-cov, conocidos

$$\vec{y} = T\vec{x} + \vec{a} \qquad E(\vec{y}) = \overline{\mu_{\vec{y}}} = E(T\vec{x} + \vec{a}) = TE(\vec{x}) + E(\vec{a}) = T\,\overline{\mu_{\vec{x}}} + \vec{a}$$

Cual es C_Y ?

$$C_{\vec{y}} = E\left[\left(\vec{y} - \overline{\mu_{\vec{y}}}\right)\left(\vec{y} - \overline{\mu_{\vec{y}}}\right)^T\right]$$

$$= E\left[\left(T\vec{x} + \vec{a} - T\,\overline{\mu_{\vec{x}}} - \vec{a}\right)\left(T\vec{x} + \vec{a} - T\,\overline{\mu_{\vec{x}}} - \vec{a}\right)^T\right]$$

$$= E\left[\left(T\vec{x} - T\,\overline{\mu_{\vec{x}}}\right)\left(T\vec{x} - T\,\overline{\mu_{\vec{x}}}\right)^T\right] = T\,E\left[\left(\vec{x} - \overline{\mu_{\vec{x}}}\right)\left(\vec{x} - \overline{\mu_{\vec{x}}}\right)^T\right]T^T$$

$$\boxed{C_{\vec{y}} = T\,C_{\vec{x}}\,T^T}$$

Ley de propagación de errores

Transformación lineal y ortogonal. Ley de propagación de errores

Qué sucede si la función con respecto a $\vec{x}$ es una función cualquiera, es decir $y(\vec{x})$.

Se realiza un desarrollo en Taylor entorno al valor medio de $\vec{x}$

$$y_i(\vec{x}) \approx y_i(\overrightarrow{\mu_{\vec{X}}}) + \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right|_{\overrightarrow{\mu_{\vec{X}}}} \left(x_1 - \mu_{X_1}\right) + \cdots + \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\right|_{\overrightarrow{\mu_{\vec{X}}}} \left(x_n - \mu_{X_n}\right) + TOS; \qquad \text{i=1,…,}r$$

Donde T es

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x} = \vec{\mu}}$$

$$a_i = y_i(\overrightarrow{\mu_{\vec{X}}}) - \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right|_{\overrightarrow{\mu_{\vec{X}}}} \mu_{X_1} - \cdots - \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\right|_{\overrightarrow{\mu_{\vec{X}}}} \mu_{X_n}$$

$$\boxed{\vec{y} \approx T\vec{x} + \vec{a}}$$

Transformación lineal y ortogonal. Ley de propagación de errores

$C_{\vec{y}} = T\, C_{\vec{x}}\, T^T$ Ley de propagación de errores

Comentarios:

- Como es el error en Y si la matriz de var-cov de x es diagonal?

- Ejercicio de Ley de propagación de errores

En un sistema de coordenadas cartesianas (x,y), las medidas x e y tienen un valor medio igual a 1, y desviación estándar en y es 3 veces la de en x, las medidas x e y son independientes. Evalúa los errores en un nuevo par de variables, r, θ , donde estas son las coordenadas polares de las medidas.