MAGGIA
LABORATORIO

Parámetros que caracterizan una variable aleatoria. Operador Esperanza

Dada una función de una variable aleatoria:

$$\mathsf{y} = H(\mathsf{x})$$

Si x es una variable aleatoria entonces y también lo será por ser y una función determinista, H, sobre x

<u>Definición:</u>

Operador esperanza:

$$E\{H(\mathsf{x})\} = \sum_{i=1}^{n} H(x_i) P(\mathsf{x} = x_i)$$

$$E\{H(\mathsf{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dado un $H(\mathsf{x}) = (\mathsf{x} - c)^{\ell}$ El valor esperado de $E\{(\mathsf{x} - c)^{\ell}\}$

Se llama momento de orden l de una variable con respecto a c

Ejemplo:

Si x es una variable definida para el experimento de tirar la moneda y anotar lo que aparece en la cara superior, ($x1=0$ si es cara y $x2= 1$ si es ceca),

$H(x)=1+x+x^2$, H es una función determinista, polinomio de orden dos por ejemplo, sobre la variable x

a) Haga 5 pruebas del experimento anterior, anote el resultado, de x y de H(x)

a) ¿Qué puede concluir acerca del nuevo resultado H(x)?

Parámetros que caracterizan una variable aleatoria. Operador Esperanza

Se llama Momento de orden l de una variable con respecto a μ (respecto a la media)

$$\mu_\ell = E\{(\mathbf{x} - \boxed{\mu})^\ell\}$$

$$\mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E[(\mathrm{x} - \mu)^2]$$

$\mu_3 = E[(\mathrm{x} - \mu)^3]$ (desvío o sesgo de x)

$\mu_4 = E[(\mathrm{x} - \mu)^4]$ (curtosis de x)

.....

Cada <u>Momento</u> describe mejor al comportamiento de la variable **x**, y por lo tanto describe mejor a la función de densidad (o probabilidad) que caracteriza a la variable aleatoria.

Nota: E[x]= μ

Operador Esperanza

Algunos comentarios: vamos a llamar $\sigma^2 = \sigma^2(x) = \sigma_x^2$ hacemos referencia explicita a la variable aleatoria con la que estamos trabajando.

Demuestre:

$$\begin{aligned} E(c\mathrm{x}) &= cE(\mathrm{x}) \\ \sigma^2(c\mathrm{x}) &= c^2\sigma^2(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = E[(\mathrm{x}-\mu)^2] = E[\mathrm{x}^2 - 2\,\mathrm{x}\,\mu + \mu^2] = E[\mathrm{x}^2] - \mu^2$$

$$\mathrm{u} = \frac{\mathrm{x} - \mu}{\sigma(\mathrm{x})}$$ Variable normalizada

Algunas demostraciones del Operador Esperanza:

Realice la Demostraciones, teniendo en cuenta la definición de operador esperanza, utilice por simplicidad la definición para la variable aleatoria continua.

(donde k es un numero cualquiera)

$$\sigma_{kx}^2 = E[(k\mathrm{x} - \mathrm{E}[k\,\mathrm{x}])^2] = E[(k\mathrm{x})^2 - 2\,k\mathrm{x}\,\mathrm{E}[k\,\mathrm{x}] + \mathrm{E}[k\,\mathrm{x}]^2 =$$

$$k^2\{E[\mathrm{x}^2] - 2\mathrm{x}\mathrm{E}[\mathrm{x}] + \mathrm{E}[\mathrm{x}]^2\} = k^2 E[(\mathrm{x} - E[\mathrm{x}])^2] = k^2\sigma_x^2$$

Desigualdad de Chebychev

Sea E[x]= μ y $\sigma^2 = E[(x-\mu)^2]$

$$P(|x-\mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

k es un número cualquiera;

Nos ofrece una cota inferior a la probabilidad.

La desigualdad nos brinda una idea probabilística de nuestra variable x, conociendo solo su media y varianza (sin importar cual es su función de probabilidad o probabilidad asociada). Por ejemplo: si elegimos k=3, entonces $P(|x-\mu| > 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$

En palabras: La probabilidad de la diferencia de la variable (x) con su media sea mayor a 3 veces su desviación estándar es menor o igual a un noveno (1/9)

Demostración de la desigualdad de Chevychev

$$\mathrm{P}(|\mathrm{x}-\mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Definimos: $s = (\mathrm{x}-\mu)^{\mathbf{2}}$ con función de densidad de probabilidad g(s)

$$\boldsymbol{P}(|\mathrm{x}-\mu| > k\,\sigma) = \boldsymbol{P}\left(\sqrt{(\mathrm{x}-\mu)^{\mathbf{2}}} > k\,\sigma\right) = \boldsymbol{P}(s > k^2\sigma^2) = \int_{k^2\sigma^2}^{+\infty} g(s)\,ds$$

Por otro lado

$\sigma^2 = E[(\mathrm{x}-\mu)^2] = E[s] = \int_{-\infty}^{+\infty} s\,g(s)\,ds = \int_0^{+\infty} s\,g(s)\,ds$, ya que s es > 0

$$\sigma^2 = \int_0^{k^2\sigma^2} s\,g(s)\,ds + \int_{k^2\sigma^2}^{+\infty} s\,g(s)\,ds$$

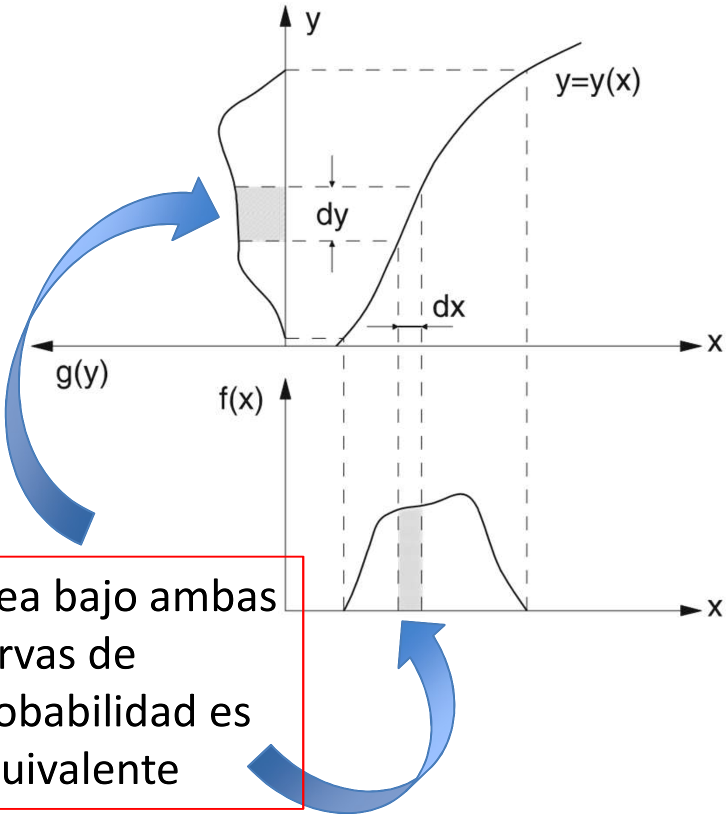
g(s) ≥ 0; ≥ 0 $\geq k^2\sigma^2 \int_{k^2\sigma^2}^{+\infty} g(s)ds = k^2\sigma^2 P(s \geq k^2\sigma^2)$

Finalmente:

$$\sigma^2 \geq k^2\sigma^2\, P(s \geq k^2\sigma^2) = k^2\sigma^2\, P((\mathrm{x}-\mu)^{\mathbf{2}} \geq k^2\sigma^2) = k^2\sigma^2 \boldsymbol{P}(|\mathrm{x}-\mu| > k\,\sigma)$$

$$\frac{1}{k^2} \geq \boldsymbol{P}(|\mathrm{x}-\mu| > k\,\sigma)$$

Transformación de variable



Área bajo ambas curvas de probabilidad es equivalente

$y = y(x)$ Donde x tienen f. d. p $\boxed{f(x)}$

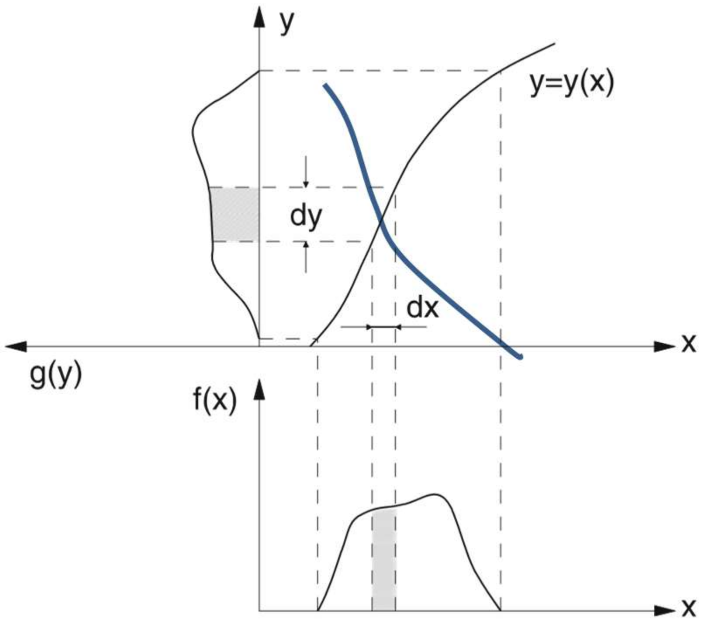
Siempre pasará que (por ejemplo el caso anterior, donde y(x) es una función creciente biyectiva:

$P(x \le \mathrm{x} < x+dx) = P(y \le \mathrm{y} < y+dy)$

$f(x)\, dx = g(y)\, dy$

Si y(x) es biyectiva pero decreciente?

¿Cuál es la f. d. p. de y?



P($x \leq$ x $< x+dx$) = P($y \leq$ y $< y+dy$)

$f(x) = g(y)\ (-dy/dx)$

$$\boxed{g(y) = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right| f(x)}$$

¿Qué pasa si la situación ahora es una función que no es biyectiva?, por ejemplo:

y=y(x)=x^2

¿Cuál será la función de densidad de probabilidad de y?