Muestreo aleatorio

Las clases anteriores presentamos un número de distribuciones (funciones de densidad de probabilidad) pero no dijimos nada de cómo obtenerlas para casos particulares. Solamente presentamos la función que describe la probabilidad de que una variable esté en cierto intervalo.

Esta función **depende** de ciertos **parámetros** (por ejemplo, μ y σ para la función de Gauss o λ para la función de Poisson) que, en general, **son desconocidos**.

En muchas situaciones no tenemos conocimiento directo de la **distribución de probabilidad** y debemos **aproximarla** por la **distribución de frecuencia**, obtenida de forma experimental.

El conjunto de mediciones que utilicemos se llama **muestra** y siempre será finita.

Definiciones

Población: conjunto con todos los posibles resultados de una observación individual. En general, la cantidad de resultados es infinita.

Muestra: es un subconjunto de elementos de la población. Por definición, la cantidad de elementos es finita. Una muestra con n elementos se dice que es una muestra de tamaño n.

Sea la población de los posibles resultados de la variable X, con una función de densidad de probabilidad $f(x)$. Supongamos que tomamos l muestras de tamaño n:

Muestra 1: $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \cdots, X_n^{(1)}$

Muestra j: $X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \cdots, X_n^{(j)}$

Muestra l: $X_1^{(l)}, X_2^{(l)}, \cdots, X_n^{(l)}$

Definimos el vector que contiene las n mediciones de una muestra como:

$$\overline{x}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \cdots, X_n^{(j)}\right)$$

La función de densidad de probabilidad de este vector será:

$$g(\overline{x}) = g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Esta función debe satisfacer dos condiciones para que la muestra se considere **aleatoria** (**random**):

a) Las mediciones individuales x_i deben ser independientes, luego:

$$g(\overline{x}) = g_1(x_1)\, g_2(x_2)\, \cdots g_n(x_n)$$

b) Las funciones marginales individuales deben ser idénticas e iguales a:

$$g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_n(x) = f(x)$$

Luego: $g(\overline{x}) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)$

Si una **muestra cumple** estas **condiciones** entonces la **muestra es aleatoria** y la función conjunta se simplifica significativamente.
De aquí en más la palabra **muestra** refiere a **muestra aleatoria**.

Función distribución empírica

Supongamos una muestra de dimensión n de la variable X, representada por el conjunto $\{x_i, i = 1, n\}$. Supongamos que los valores de la muestra se encuentran ordenados de menor a mayor. Se define la **función de distribución empírica** (función acumulativa empírica) como:

$$W_n(x) = \frac{n_x}{n}$$

n_x es la cantidad de elementos tales que: $X < x$

n tamaño de la muestra

Es una función escalera que se incrementa en $\frac{1}{n}$ cuando x se hace mayor que un elemento de la muestra.

La función también se llama función de distribución de la muestra y es una aproximación de la función de distribución de la población $F(x)$.

Se puede entender que:

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} W_n(x)$$

Estadístico: es cualquier función de los elementos de una muestra. Como la muestra es una variable aleatoria, el estadístico también lo es.

Una situación común en el análisis de datos es conocer la expresión matemática de la función densidad de probabilidad de una población, pero desconocer los valores de los parámetros.

La solución consiste tomar una muestra (finita) de la variable o de variables relativas y determinar los valores de los parámetros, de la forma más exacta posible.

Como la muestra es finita, **nunca** vamos a obtener los **valores exactos de los parámetros**, lo que obtenemos son **estimadores de los parámetros**.

Estimador de un parámetro: es un estadístico que sirve para estimar el valor de un parámetro de una función de probabilidad, a partir de una muestra.

$$S = S(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Sea**:**

$S = S(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ estimador de λ

a) **Estimador sin sesgo**: es aquel que sin importar el tamaño de la muestra, el valor esperador del estimador es igual al parámetro que estima

$$\mathrm{E}[S] = \lambda$$

b) **Estimador consistente**: es aquel cuya varianza tiende a cero cuando el tamaño de la muestra crece arbitrariamente.

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(S) = 0$$

c) **Estimador eficiente**: en muchas situaciones es posible obtener una cota para el estimador de la varianza del estimador. El estimador cuya varianza se aproxime más a la cota se dice que es el más eficiente.

Muestreo de una población homogénea – Estimadores de parámetros

El caso de mayor aplicación es el relativo a una muestra, $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, de una población de infinitos valores descrita por la función de densidad de probabilidad $f(x)$. Entonces, tenemos que:

$E[X_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, g_i(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \mu_X$ y $\sigma(X_i) = \sigma_X$.

1. Estimador de la media de la población / Media muestral:

$$\tilde{\mu}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

1. a Verificación de ausencia de sesgo

$$E[\tilde{\mu}_X] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$= \frac{1}{n}\, n\, E[X_1]$$

$$\therefore \quad E[\tilde{\mu}_X] = \mu_X$$

1.b Verificación de consistencia

$$\sigma^2(\tilde{\mu}_X) = E[(\tilde{\mu}_X - \mu_X)^2]$$ ← Varianza de la media de la muestra

$$= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{n}\mu_X\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_X)\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu_X)^2] + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} E\left[(X_i - \mu_X)\left(X_j - \mu_X\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(X_i)$$

$$= \frac{\sigma_X^2}{n} \qquad \therefore \qquad \lim_{n\to\infty}\sigma^2(\tilde{\mu}_X) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_X^2}{n} \to 0$$

Conclusión de 1.a y 1.b: la media de la muestra (también llamado promedio simple o media aritmética) es un buen estimador de la media (parámetro) de la población.

2. Estimador de la varianza de la población / Varianza muestral:

Como estimador de la varianza de la población, podemos probar con la media aritmética (promedio) del cuadrado de las diferencias:

$$S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{\mu}_X)^2$$

2. a Verificación de ausencia de sesgo

$$E[S'^2] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{\mu}_X)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_X + \mu_X - \tilde{\mu}_X)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}E[(X_i - \mu_X)^2] + \sum_{i=1}^{n}E[(\mu_X - \tilde{\mu}_X)^2] + 2\sum_{i=1}^{n}E[(X_i - \mu_X)(\mu_X - \tilde{\mu}_X)]\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_X^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sigma_X^2 + 2\sum_{i=1}^{n}E[(X_i - \mu_X)(\mu_X - \tilde{\mu}_X)]\right\}$$

$$E[(X_i-\mu_X)(\mu_X-\tilde{\mu}_X)] = -E[(X_i-\mu_X)(\tilde{\mu}_X-\mu_X)]$$

$$= -E\left[(X_i-\mu_X)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu_X)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E\left[(X_i-\mu_X)\left(X_j-\mu_X\right)\right]$$

$$= -\frac{\sigma_X^2}{n}$$

Luego:

$$E[S'^2] = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_X^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sigma_X^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_X^2}{n}\right\}$$

$$= \sigma_X^2 - \frac{1}{n}\sigma_X^2$$

$$E[S'^2] = \frac{n-1}{n}\sigma_X^2$$

$\therefore$ No es un buen estimador porque depende de n

Sin embargo, la expresión anterior nos permite proponer otro estimador que eliminará el sesgo:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{\mu}_X)^2$$

Verifiquemos:

$$E[S^2] = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{\mu}_X)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{n}{n-1}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{\mu}_X)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{n}{n-1}S'^2\right]$$

$$= \frac{n}{n-1}\,\frac{n-1}{n}\sigma_X^2$$

$E[S^2] = \sigma_X^2$ $\quad\therefore\quad$ S es un estimador sin sesgo

2. b Verificación de consistencia

La varianza de la varianza de la población tiene esta expresión (no la vamos a demostrar):

$$\sigma^2(S^2) = \left(\frac{\sigma_X^2}{n-1}\right)^2 2(n-1)$$

$$\sigma^2(S^2) = \frac{2}{n-1}\,\sigma_X^4$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sigma^2(S^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_X^4}{n-1} \to 0$$

Conclusión de 2.a y 2.b: la varianza de la muestra es un buen estimador de la varianza (parámetro) de la población.

Recapitulando:

Sea $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ una muestra de una población de infinitos valores descrita por la función de densidad de probabilidad $f(x)$.

La situación es equivalente a tener un conjunto de n mediciones de una cierta cantidad d. Entonces podemos pensar $X_i = d + v_i$ con $\mu_X = d$ y $v_i \sim f(0, \sigma)$.

Entonces:

1. Media muestral: $$\tilde{\mu}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

a) Es un buen estimador de la media de la población.

b) El estimador de su varianza está dado por: $\tilde{\sigma}^{\,2}(\tilde{\mu}_X) = \dfrac{S^2}{n}$

c) Por el Teorema Central del Límite, su función de densidad de probabilidad es una función de Guass con media μ_X para n suficientemente grande. Esto tiene implicancias en la distribución de la probabilidad en torno a la media.

2. Varianza muestral: $$S^2 = \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{\mu}_X)^2$$

a) Es un buen estimador de la varianza de la población.

b) El estimador de su varianza está dado por: $$\tilde{\sigma}^2(S^2) = \frac{2}{n-1}S^4$$

c) Su función de densidad de probabilidad es una función de Chi-2.

d) También se la puede designar con el símbolo $\tilde{\sigma}_x^2$

Ejercicio con JupyterLab:

Histograma, Gráfico de frecuencias, Función distribución empírica.

Muestra, media y varianza poblacionales, media y varianza muestrales

Muestreo aleatorio de una población in-homogénea

Sea G una población dividida en diferentes subpoblaciones $G_1, G_2, G_3, \cdots, G_t$, cada una descrita por una función de densidad de probabilidad diferente $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_t(x)$. A partir de esto, las funciones de distribución (prob. acumulada) individuales se pueden escribir como:

$$F_i(x) = P(X < x / X \in G_i)$$

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(x')dx'$$

Recordando probabilidad:

Si: $E = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_t \longrightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{t} P(B/G_i)\,P(G_i)$

Luego, podemos plantear que la función de distribución (acumulada) de la población tiene la forma:

$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{t} P(X < x \,/ X \in G_i)\, P(X \in G_i)$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{t} F_i(x)\; p_i$$

Finalmente, la función densidad de probabilidad de la población será:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{t} f_i(x)\, p_i$$

Expresión para la media de una población in-homogénea

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{i=1}^{t} f_i(x)\, p_i\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_i(x)\, dx\, p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \mu_{X_i}\ p_i$$

$$\therefore \qquad \mu_X = \sum_{i=1}^{t} \mu_{X_i}\ p_i \quad \longleftarrow$$

Promedio pesado

Expresión para la varianza de una población in-homogénea

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^{t} f_i(x)\, p_i \, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{t} p_i \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mu_{X_i} + \mu_{X_i} - \mu_X\right)^2 f_i(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{X_i})(\mu_{X_i} - \mu_X) f_i(x)\, dx = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{t} p_i \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mu_{X_i}\right)^2 f_i(x)\, dx + \left(\mu_{X_i} - \mu_X\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\, dx \right\}$$

$$\therefore \quad \sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{t} p_i \, \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^{t} p_i \left(\mu_{X_i} - \mu_X\right)^2$$

Acuerdo interno

Acuerdo externo

Estimador de la varianza del promedio pesado utilizando propagación de errores

Tenemos:

$$\tilde{\mu}_{X_i},\ \tilde{\sigma}^2_{\mu_i},\ i = 1, t \longrightarrow \tilde{\tilde{\mu}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mu}_{X_t} \end{bmatrix} \qquad C_{\tilde{\tilde{\mu}}} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}^2_{\tilde{\mu}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}^2_{\tilde{\mu}_t} \end{bmatrix}$$

Entonces, podemos escribir:

$$\tilde{\mu}_X = \sum_{i=1}^{t} p_i\, \tilde{\mu}_{X_i} = A\ \tilde{\tilde{\mu}} \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p_t \end{bmatrix}$$

Aplicando propagación de errores:

$$\tilde{\sigma}^2_{\tilde{\mu}_X} = A\, C_{\tilde{\tilde{\mu}}}\, A'$$

$$\tilde{\sigma}^2_{\tilde{\mu}_X} = \sum_{i=1}^{t} p_i^2\ \tilde{\sigma}^2_{\mu_i}$$

Estimadores del promedio pesado y la varianza de una población in-homogénea

Si tenemos una serie de estimadores de medias y sus varianzas (por ejemplo, medidas de una magnitud con instrumentos de diferentes precisiones) : $\tilde{\mu}_{X_i}, \tilde{\sigma}^2_{\mu_i}, i = 1, t$

Estimador del promedio pesado $$\tilde{\mu}_X = \sum_{i=1}^{t} p_i \, \tilde{\mu}_{X_i}$$

Estimador de la varianza del promedio pesado:

Acuerdo interno $$\tilde{\sigma}^2_{\tilde{\mu}_{X\,Int}} = \sum_{i=1}^{t} p_i^2 \, \tilde{\sigma}^2_{\mu_i}$$

Acuerdo externo $$\tilde{\sigma}^2_{\tilde{\mu}_{X\,Ext}} = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t} p_i \left(\tilde{\mu}_{X_i} - \tilde{\mu}_X\right)^2$$

Estimador de la varianza de la población in-homogénea: $$\tilde{\sigma}^2_X = \sum_{i=1}^{t} p_i \, \tilde{\sigma}^2_{\mu_i} + \sum_{i=1}^{t} p_i \left(\tilde{\mu}_{X_i} - \tilde{\mu}_X\right)^2$$

Función de Verosimilitud – Método de Máxima Verosimilitud

El Método de Máxima Verosimilitud se utiliza para encontrar las expresiones de los estimadores de parámetros de una función de densidad de probabilidad para casos más generales de los que vimos hasta el momento (estimador de media y varianza de población homogénea).

Tenemos un vector, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)'$, con los parámetros de la función de probabilidad de un vector de variables aleatorias, $\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ dada por $F\left(\vec{x}, \vec{\lambda}\right)$ y función densidad de probabilidad $f\left(\vec{x}, \vec{\lambda}\right)$.

Si tenemos una muestra $\vec{x}$, podemos pensar a $f\left(\vec{x}, \vec{\lambda}\right)$ como una función de $\vec{\lambda}$.

Sea $\vec{x}^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)}\right)$ una muestra cuya probabilidad a posteriori (conociendo los valores de la muestra) es:

$$dP^{(j)} = f\left(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}\right) d\vec{x} \longrightarrow$$

probabilidad de que saliera un valor entre $\vec{x}^{(j)}$ y $\vec{x}^{(j)} + d\vec{x}$

Si tomamos una muestra de tamaño N (es decir tomamos N valores independientes de la variable $\vec{x}$,

$$\left\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \cdots \vec{x}^{(N)}\right\}$$

Su probabilidad total será:

$$dP = \prod_{j=1}^{N} f\left(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}\right)\, d\vec{x}$$

A partir de la expresión anterior, se define la Función de Verosimilitud que depende de $\vec{\lambda}$. Se la llama con la letra L y a su logaritmo con l:

$$L\left(\vec{\lambda}\right) = \prod_{j=1}^{N} f\left(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}\right) \qquad l\left(\vec{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{N} ln\left(f\left(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}\right)\right)$$

L y l son funciones de la muestra por lo que ellas mismas son variables aleatorias y no deben confundirse con funciones de densidad de probabilidad.

Método de máxima Verosimilitud

El método establece que los parámetros más confiables son los que hacen máxima la Función de Verosimilitud.

El problema de encontrar el mejor estimador para $\vec{\lambda}$ se transformar en encontrar la expresión de $\vec{\lambda}$ que haga máxima la Función de Verosimilitud. Lo que equivale a buscar $\tilde{\vec{\lambda}}$ tal que:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} l\left(\tilde{\vec{\lambda}}\right) = 0 \qquad i = 1, p$$

Aplicación del método a mediciones con diferentes precisiones

Supongamos que medimos N veces, $\{x^j, j = 1, N\}$, una magnitud con diferentes instrumentos con diferentes precisiones. Suponemos que los errores de las mediciones tienen una distribución normal (de Gauss) y la varianza es $o_i, i = 1, N$.

El método de máxima verosimilitud nos sirve para encontrar el estimador más confiable para la magnitud que medimos.

Sabemos que:

$$f(x^j, \lambda)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, \sigma_j^2}}\, exp\left(-\frac{\left(x^j - \lambda\right)^2}{2\sigma_j^2}\right) dx$$

$$L = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\, \sigma_j^2}}\, exp\left(-\frac{\left(x^j - \lambda\right)^2}{2\sigma_j^2}\right)$$

$$l = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \frac{\left(x^j - \lambda\right)^2}{2\sigma_j^2} + Cte$$

Aplicando el método de máxima verosimilitud, el estimador más confiable está dado por:

$$\frac{d}{d\lambda} l(\tilde{\lambda}) = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(x^{j} - \tilde{\lambda}\right)^{2}}{2\sigma_j^2} + Cte\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\left(x^{j} - \tilde{\lambda}\right)}{\sigma_j^2} = 0$$

Despejando: $$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sigma_j^2}x^{j} = 0$$

Resultando que:

$$\tilde{\mu} = \sum_{j=1}^{N} p_j\, x^{j} \qquad p_j = \frac{\frac{1}{\sigma_j^2}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Resumiendo:

Si tenemos:

$$\tilde{\mu}_{X_i},\ \tilde{\sigma}^2_{\mu_i},\ i = 1,t \longrightarrow p_i = \frac{\frac{1}{\tilde{\sigma}^2_{\mu_i}}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\tilde{\sigma}^2_{\mu_j}}}$$

Estimador del promedio pesado $$\tilde{\mu}_X = \sum_{i=1}^{t} p_i\, \tilde{\mu}_{X_i}$$

Estimador de la varianza del promedio pesado:

Acuerdo interno $$\tilde{\sigma}^2_{\tilde{\mu}_{X\,Int}} = \sum_{i=1}^{t} p_i^2\, \tilde{\sigma}^2_{\mu_i}$$

Acuerdo externo $$\tilde{\sigma}^2_{\tilde{\mu}_{X\,Ext}} = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t} p_i \left(\tilde{\mu}_{X_i} - \tilde{\mu}_X\right)^2$$

Estimador de la varianza de la población in-homogénea: $$\tilde{\sigma}^2(X) = \sum_{i=1}^{t} p_i\, \tilde{\sigma}^2_{\mu_i} + \sum_{i=1}^{t} p_i \left(\tilde{\mu}_{X_i} - \tilde{\mu}_X\right)^2$$

Ejemplo:

Se midió la intensidad de la corriente en un circuito con seis instrumentos diferentes. Se realizaron un total de 10 mediciones por instrumentos, se estimaron medias y varianzas, y se obtuvo la tabla siguiente:

Inst.	Est. Media [Amp]	Est. D.E. [Amp]
1	0.630	0.010
2	0.641	0.011
3	0.675	0.030
4	0.700	0.051
5	0.642	0.011
6	0.631	0.021

Promedio simple:

Para el caso de no disponer de las desviaciones estándar, deberíamos calcular el promedio simple (pág. 13):

$$\tilde{\mu}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 0.653\ Amp$$

$$S = \tilde{\sigma}_X = \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{\mu}_X)^2} = 0.028\ Amp$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}_X} = \frac{S}{\sqrt{n}} = 0.011\ Amp$$

Promedio pesado:

Para el caso en que disponemos de las desviaciones estándar, debemos calcular el promedio simple (pág. 27):

$$p_i = \frac{\frac{1}{\tilde{\sigma}^2_{\mu_i}}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\tilde{\sigma}^2_{\mu_j}}}$$

$$\tilde{\mu}_X = \sum_{i=1}^{t} p_i\, \tilde{\mu}_{X_i} = 0.639\, Amp \qquad \tilde{\sigma}_X = \sqrt{\sum_{i=1}^{t} p_i\, \tilde{\sigma}^2_{\mu_i} + \sum_{i=1}^{t} p_i \left(\tilde{\mu}_{X_i} - \tilde{\mu}_X\right)^2} = 0.046\, Amp$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}_{X\,Int}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{t} p_i^2\, \tilde{\sigma}^2_{\mu_i}} = 0.006\, Amp$$

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}_{X\,Ext}} = \sqrt{\frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^{t} p_i \left(\tilde{\mu}_{X_i} - \tilde{\mu}_X\right)^2} = 0.005\, Amp$$