Función característica

Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad $F(x) = Prob(X < x)$ y densidad de probabilidad $f(x)$ la **función característica** de X queda definida como:

$$\varphi_X(t) = E[exp(itX)] = E\left[e^{itX}\right]$$

Como veremos, la función característica es de mucha utilidad en demostraciones de resultados y propiedades de variables aleatorias.

Permite transformar (y anti-transformar) la función de densidad de probabilidad al campo complejo donde la función se simplifica, operar y volver al campo real.

El concepto de función característica es equivalente al de transformada y anti-transformada de Fourier.

Para el caso en que **X es continua**:

$$\varphi(t) = E[exp(itX)] = \int_{-\infty}^{+\infty} exp(itx)\, f(x)\, dx$$

Para el caso en que **X es discreta**:

$$\varphi(t) = E[exp(itX)] = \sum_i exp(itx_i)\, P(X = x_i)$$

Para el caso en que **X es continua, la anti-transformada** está dada por la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-itx)\, \varphi(t)\, dt$$

o de forma equivalente:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\cos(tx) - i\, sin(tx)\big)\, \varphi(t)\, dt$$

Momentos de la variable X de orden n respecto al origen (definición):

$$\lambda_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \; f(x)dx$$

Por otro lado, vemos que derivando φ respecto de t tenemos:

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} exp(itx)\, f(x)\, dx\right] = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, exp(itx)\, f(x)\, dx$$

Luego:

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx$$

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n\, \lambda_n$$

Por ejemplo, para $n = 0$ y $n = 1,$ tenemos:

$$\lambda_0 = \varphi(0) = 1$$

$$\mu = \lambda_1 = i^{-1}\varphi^{(1)}(0)$$

Momentos de la variable X de orden n respecto a al media μ:

Definimos: $W = X - \mu$

$$\varphi_W(t) = E[exp(itW)]$$

Aplicando propiedades de $E[.]$:

$$\varphi_W(t) = E[exp(itW)] = E\big[exp\big(it(X-\mu)\big)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} exp\big(it(x-\mu)\big)\, f(x)\, dx$$

Llegamos a que:

$$\varphi_W(t) = exp(-it\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} exp(itx)\, f(x)\, dx$$

$$\varphi_W(t) = exp(-it\mu)\, \varphi_X(t)$$

La expresión anterior vincula la función característica de una variable con la función característica de la misma centrada en 0.

Además, derivando n veces respecto de t:

$$\varphi_W^{(n)}(t) = \frac{d^n \varphi_W(t)}{dt^n}$$

obtenemos:

$$\varphi_W^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n \, exp\big(it(x-\mu)\big) \, f(x) \, dx$$

$$\varphi_W^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n \, f(x) \, dx$$

$$\varphi_W^{(n)}(0) = i^n E[(x-\mu)^n]$$

La expresión anterior relaciona las derivadas de la función característica respecto a la media con los momentos centrados en la media.

En particular, para $n = 0, 1, 2$ tenemos:

$$\varphi_W^{(0)}(0) = E[(x-\mu)^0] = 1$$

$$\varphi_W^{(1)}(0) = i \, E[(x-\mu)^1] = 0$$

$$\varphi_W^{(2)}(0) = -E[(x-\mu)^2] = -\sigma^2$$

Funciones características más comunes

1. Función característica de la densidad de probabilidad de Poisson

$$P(k) = \frac{1}{k!}\,\lambda^k e^{-\lambda}$$

$$\varphi_K(t) = E\left[e^{itK}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\,P(k)$$

$$= \sum_k e^{itk}\,\frac{1}{k!}\,\lambda^k e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_k e^{itk}\,\frac{1}{k!}\,\lambda^k$$

$$= e^{-\lambda} \sum_k \frac{1}{k!}\,\left(\lambda\, e^{it}\right)^k$$

Desarrollo de Taylor de la exponencial

$$\varphi_K(t) = e^{-\lambda}\, e^{\lambda\, e^{it}}$$

Luego:

Función de densidad		Función característica
$P(k) = \frac{1}{k!}\,\lambda^k \exp(-\lambda)$	$\longleftrightarrow$	$\varphi_K(t) = \exp\left(\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right)$

2. Función característica de la densidad de probabilidad de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma_X} exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right)$$

$$\varphi(t) = E[exp(itX)] = \int_{-\infty}^{+\infty} exp(itx)\,\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma_X}\,exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right)dx$$

$$\ldots\ *$$

Luego:

Función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\sigma_X}\,exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right) \longleftrightarrow$$

Función característica

$$\varphi_X(t) = exp(it\mu_X)\,exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_X^2\,t^2\right)$$

Comentario: la función característica de una función de Gauss con media igual a cero es ella misma una función de Gauss. El producto de las varianzas de ambas es igual a 1.

* La demostración no es simple y utiliza convolución y números complejos, se puede ver en las pp. 86 y 87 del Brandt.

Resultado importante: sean X e Y dos variables aleatorias independientes y definimos W como la suma de las anteriores.

Si X, Y independientes $\longrightarrow$ $f_{x,y}(x,y) = f_{x,}(x) f_y(y)$

$$W = X + Y$$

$$\varphi_W(t) = E[exp(itW)] = E[exp(it(X+Y))]$$

$$= E[exp(itX + itY)]$$

$$= E[exp(itX)\ exp(itY)]$$

Porque son indep.

$$= E[exp(itX)]E[exp(itY)]$$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\ \varphi_Y(t)$$

Es decir: la función característica de la suma de dos variables aleatorias es igual al producto de las funciones características de las variables individuales. Este resultado se puede generalizar para n variables.
A continuación, hay ejemplos del uso de este resultado.

Por ejemplo, sean X e Y variables aleatorias independientes con función densidad de probabilidad de Poisson. Aplicando el resultado anterior podemos encontrar la función densidad de probabilidad de Z = X + Y.

$$P_X(x) = \frac{1}{x!}\,\lambda^x\,exp(-\lambda_X) \qquad \varphi_X(t) = exp\left(\lambda_X\left(e^{it}-1\right)\right)$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{y!}\,\lambda^y exp(-\lambda_Y) \qquad \varphi_Y(t) = exp\left(\lambda_Y\left(e^{it}-1\right)\right)$$

Entonces, para:

$$Z = X + Y \longrightarrow \varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$$

$$= \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$$

$$= exp\left(\lambda_X\left(e^{it}-1\right)\right)\,exp\left(\lambda_Y\left(e^{it}-1\right)\right)$$

$$= exp\left((\lambda_X+\lambda_Y)\left(e^{it}-1\right)\right)$$

La expresión resultante se corresponde con la función característica de una función de Poisson donde $\lambda = \lambda_X + \lambda_Y$. Luego:

$$\varphi_Z(t) = \exp\left((\lambda_X+\lambda_Y)\left(e^{it}-1\right)\right) \longrightarrow P_Z(z) = \frac{1}{z!}\,(\lambda_X+\lambda_Y)^z\,\exp(-(\lambda_X+\lambda_Y))$$

Teorema Central del Límite

Consideremos una variable aleatoria X, que sea la suma de los resultados de n experimentos X_i. Las X_i son variables aleatorias independientes con una misma función de densidad de probabilidad (**no importa cuál**), con media a y varianza b^2.

El Teorema Central de Límite establece que:

$$X = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tiene una función de densidad de probabilidad de Gauss con media y varianza dadas por:

$$\mu_X = n\,a$$

$$\sigma_X^2 = n\,b^2$$

Demostración

Definimos variables nuevas centralizadas en la media:

$X'_i = X_i - a$ con función característica: $\varphi_{X'_i}(t)$

Por demostraciones anteriores sabemos que:

$$\varphi_{X'_i}^{(0)}(0) = 1 \qquad \varphi_{X'_i}^{(1)}(0) = 0 \qquad \varphi_{X'_i}^{(2)}(0) = -b^2$$

Desarrollando por Taylor la función característica de X'_i:

$$\varphi_{X'_i}(t) = 1 + 0\,t - \frac{1}{2} b^2\, t^2 + \cdots$$

Definiendo variables nuevas dadas por:

$$U_i = \frac{X'_i}{b\sqrt{n}} = \frac{X-a}{b\sqrt{n}} \longrightarrow \varphi_{U_i}(t) = E[exp(itU_i)]$$

$$= E\left[exp\left(it\frac{X'_i}{b\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= \varphi_{X'_i}\left(\frac{t}{b\sqrt{n}}\right)$$

$$\therefore\ \varphi_{U_i}(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \cdots$$

Luego, definimos U y aplicamos el resultado que la función característica de una suma es el producto de las funciones características:

$$U = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} U_i \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\varphi_U(t) &= \lim_{n\to\infty} \{\varphi_{U_i}(t)\}^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{1 - \frac{t^2}{2n} + \cdots\right\}^n \\ &= \lim_{n\to\infty} exp\left[\left(-\frac{1}{2\,n}\,t^2\right)n\right] \\ &= exp\left(-\frac{1}{2}\,t^2\right)\end{aligned}$$

Desarrollo de Taylor de la exponencial

Luego, la función densidad de probabilidad que corresponde a esta función característica es:

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, \exp\left(-\frac{1}{2}\,u^2\right)$$

Es decir, la función de Gauss de media cero y varianza 1.

Finalmente, haciendo una transformación de variables para volver a las variables originales:

$$U = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} U_i = \lim_{n\to\infty} \frac{X - n\,a}{b\,\sqrt{n}}$$

Llegamos a que:

$$f_X(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\,\pi n}} \exp\left(-\frac{1}{2\,nb^2}\,(x - n\,a)^2\right)$$

Demostrando que:

$$X = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tiene una función de densidad de probabilidad de Gauss con media y varianza dadas por:

$$\mu_X = n\,a$$

$$\sigma_X^2 = n\,b^2$$

Recordando que:

$$\hat{\mu} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

el TCL dice que $\hat{\mu}$ tiene una función de densidad de probabilidad de Gauss con media y varianza dadas por:

$$\mu_{\hat{\mu}} = a$$

$$\sigma_{\hat{\mu}}^2 = \frac{b^2}{n}$$

Experimento de verificación del Teorema Central del Límite con JupyterLab (TCL Exp1.ipynb)

Generamos una serie aleatoria que surge del calcular el promedio de las caras en una tirada de K dados.

Repetimos el proceso N veces.

Cara de un dado: $x \longrightarrow P(x=i)=\frac{1}{6}, i=1,2,3,4,5,6$

Tirada 1: $x_1, x_2, \ldots x_K \longrightarrow z_1=\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} x_j$

Tirada N: $x_1, x_2, \ldots x_K \longrightarrow z_N=\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} x_j$

$$\mu_Z = E[Z] = E\left[\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} x_j\right] = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} E[x_j] = E[x_1] = 3.5$$

Luego, según el TCL:

Z Tiene una función de densidad de Gauss con media 3.5

Análisis de la tabla de Galtón usando el TCL.

Momentos de la variable X de orden n respecto a al media μ:

Definimos: $W = X - \mu$

$$\varphi_W(t) = E[exp(itW)] = \int_{-\infty}^{+\infty} exp(itw)\, g(w)\, dw$$

Como: $\dfrac{dx}{dw} = 1 \longrightarrow g(w) = f(x)\left|\dfrac{dx}{dw}\right| = f(x)$

$$\varphi_W(t) = E[exp(itw)] = \int_{-\infty}^{+\infty} exp\big(it(x-\mu)\big)\, f(x)\, dx$$

$$\varphi_W^{(n)}(t) = \frac{d^n \varphi_W(t)}{dt^n} = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n\, exp\big(it(x-\mu)\big)\, f(x)\, dx$$