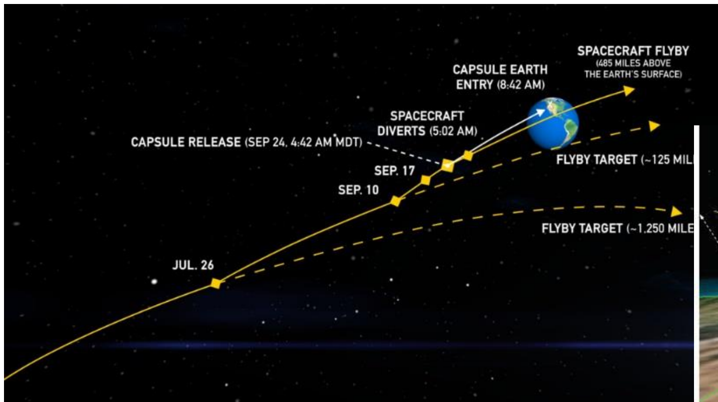
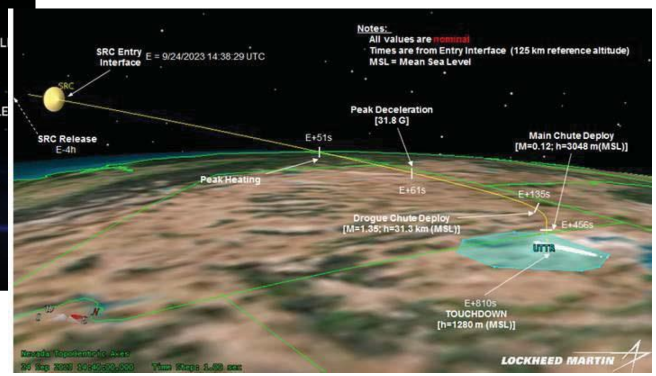
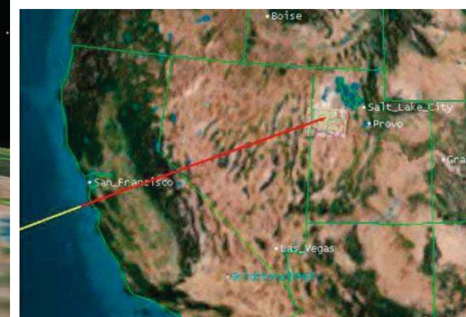
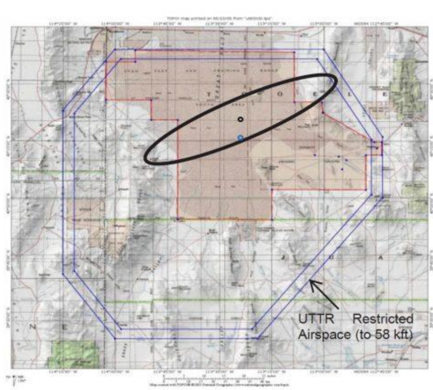
OSIRIS-REx

https://www.nasa.gov/osiris-rex









24 de septiembre de 2023

Algunas distribuciones importantes y teoremas

En estas clases, veremos en detalle algunas distribuciones específicas que son de importancia práctica y que se encuentra en muchas aplicaciones. Adicionalmente, su estudio nos llevará a algunos teoremas importantes.

Una distribución es una función que describe cómo se comporta (o distribuye) la probabilidad asociada al resultado de un experimento aleatorio.

La variable relacionada a la función puede ser discreta o continua.

1. Función de Distribución Binomial

Planteemos la situación en la que tenemos:

- Un experimento con dos posibles resultados mutuamente excluyentes, A y no A.
- El resultado de cada prueba es independiente de la anterior.
- La probabilidad de que ocurra A es constante (no cambia) y es igual a p.
- Se realiza un número finito de pruebas.

Entonces, se tiene:

$$E = A + \bar{A} \quad \Rightarrow \quad Prob(A) = p \quad Prob(\bar{A}) = 1 - p = q$$

Si realizáramos n pruebas de ese experimento tendríamos:

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ donde X_i puede dar A o $\bar{A}$

El objetivo es encontrar la expresión de una función $P(k)$ tal que dé la probabilidad de que k (estrictamente k) pruebas den A como resultado.

Podemos transformar este problema en otro asociado a una variable aleatoria definiendo:

$$X_i = \begin{cases} 1 & si\ pasa\ A \\ 0 & si\ no\ pasa\ A \end{cases}$$

Y luego:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Esta variable representa la cantidad de veces (éxitos) que las pruebas que dieron A de un total de n experimentos.

Entonces, la $P(k)$ mencionada anteriormente será la función de probabilidad de que $X = k$.

Ahora, pensemos que realizamos n experimentos y sale:

$$\underset{k}{A, \cdots, A,}\ \underset{n-k}{\bar{A}, \cdots, \bar{A}}$$

$A,\ k$ veces

$\bar{A},\ n-k$ veces

Cómo es $Prob(A, \cdots, A,\ \bar{A}, \cdots, \bar{A})$?

$$Prob(A,\cdots,A,\ \bar{A},\cdots,\bar{A}) = \ p^k\ (1-p)^{n-k}$$

Como no interesa el orden y solo interesa que sean k éxitos:

$$P(k) = \binom{n}{k}\ Prob(A,\cdots,A,\ \bar{A},\cdots,\bar{A})$$

$$\therefore \quad P(k) = W_k^n = \binom{n}{k} p^k\ q^{n-k} \qquad\qquad q = (1-p)$$

La anterior es la Función de Distribución Binomial que da la probabilidad de k éxitos en n pruebas.

Ejemplo de lanzamiento de 5 dados en el pizarrón.

Media y varianza de la Función de Distribución Binomial

X $$P(X=k)=W_k^n=\binom{n}{k}p^k\,q^{n-k}$$

Recordando que:

X_i independientes

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad X_i=\begin{cases}1 & si\ pasa\ A\\ 0 & si\ no\ pasa\ A\end{cases} \qquad \begin{aligned}Prob(A)&=p\\ Prob(\bar{A})&=1-p=q\end{aligned}$$

Estimemos primero la media y la varianza de X_i

$$E[X_i]=1\ *p+0\ *q=p$$

$$\sigma_{X_i}^2=E[(X_i-p)^2]=(1-p)^2\ *p+(0-p)^2\ *q=pq$$

Avancemos con la media y la varianza de X

- *Media*

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = np$$

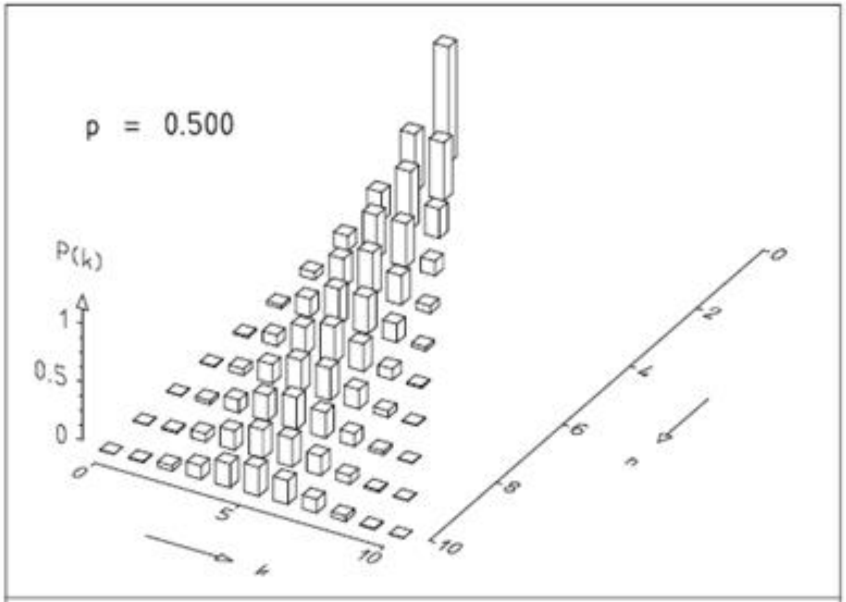
- *Varianza*

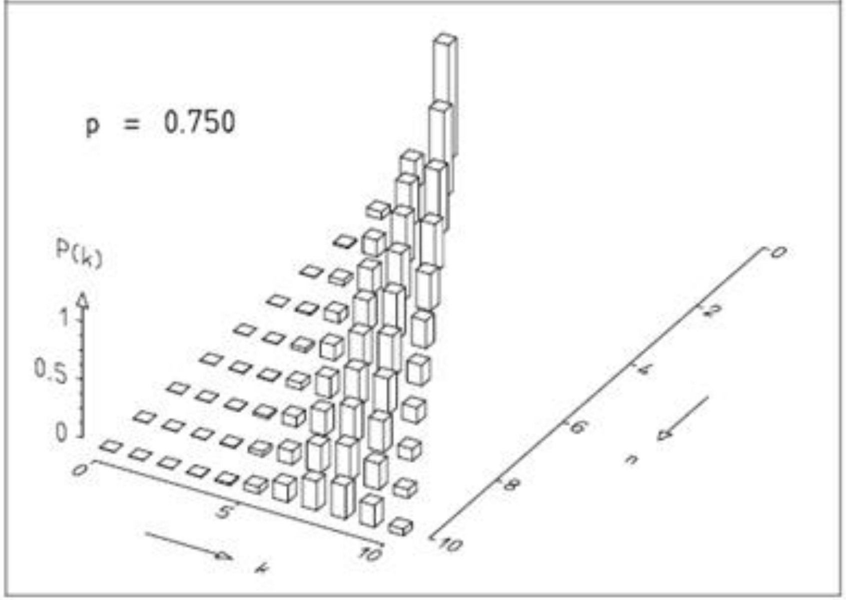
$$\sigma_X^2 = E[(X - n\,p)^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - p)\right)^2\right]$$

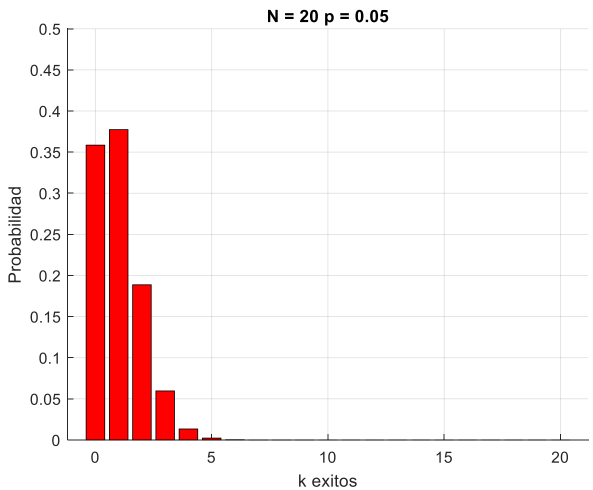
$$= \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - p)^2] + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{n} E\big[(X_i - p)\big(X_j - p\big)\big]$$

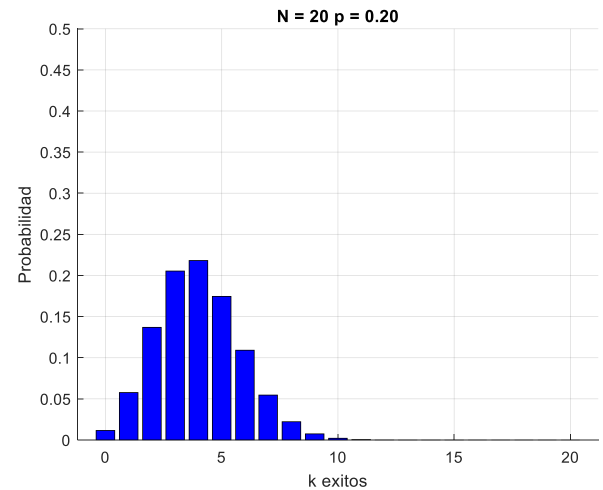
X_i independientes

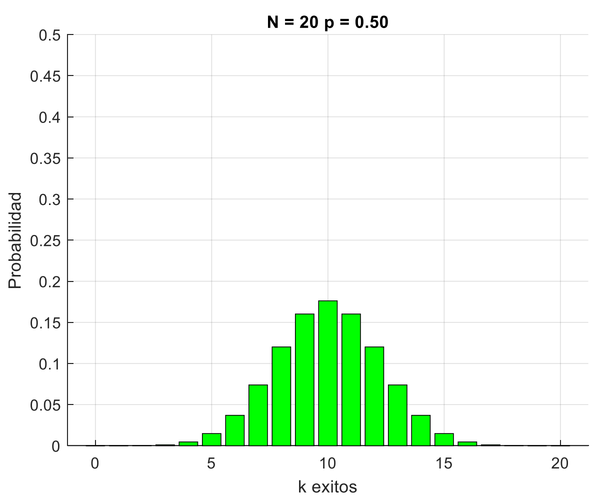
$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{X_i}^2 = npq$$

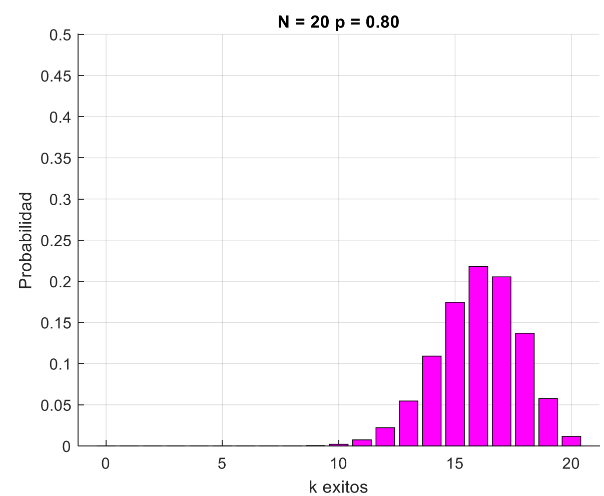

p = 0.500
P(k)
1
0.5
0
0
5
10
k
0
2
4
6
8
10
n

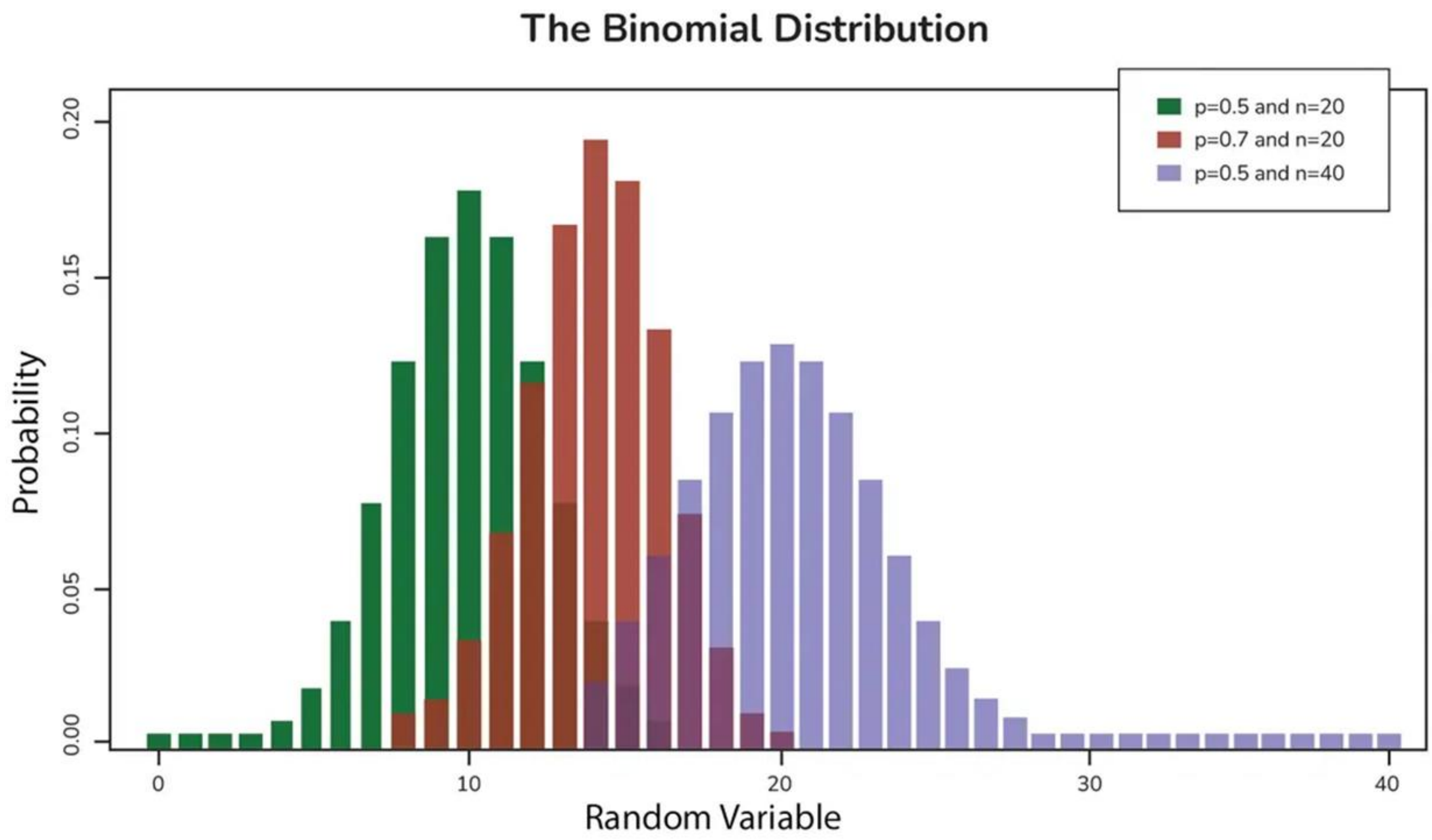

p = 0.750
P(k)
1
0.5
0
0
5
10
k
0
2
4
6
8
10
n


N = 20 p = 0.05
Probabilidad
k exitos


N = 20 p = 0.20
Probabilidad
k exitos


N = 20 p = 0.50
Probabilidad
k exitos


N = 20 p = 0.80
Probabilidad
k exitos


The Binomial Distribution
p=0.5 and n=20
p=0.7 and n=20
p=0.5 and n=40
Probability
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0
10
20
30
40
Random Variable

Repaso y ejemplo

1. Situación característica para una Distribución Binomial y parámetros que la caracterizan.

2. Calcular la probabilidad de sacar 5 veces el número 6 en 100 tiradas de un dado. Calcular el número esperado para la cantidad de veces de sacar un 6 en 100 tiradas.

3. Plantear la resolución del problema de un examen con 25 preguntas multiple-choice con 5 opciones cada una. Un estudiante decide completar el examen basándose en el azar. Cuál es la probabilidad de que el estudiante apruebe (60% o más respuestas correctas).

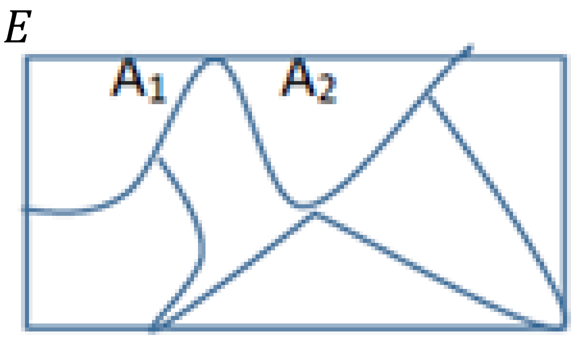
2. Función de Distribución Multinomial

Es una extensión de la Distribución Binomial

- Un experimento con L posibles resultados mutuamente excluyentes, $A_j, j = 1, L$.
- El resultado de cada prueba es independiente de la anterior.
- La probabilidad de que ocurra $A_j, j = 1, L$, es constante (no cambia) y es igual a $p_j, j = 1, L$.
- Se realiza un número finito de pruebas.

$$E = A_1 + A_2 + \cdots + A_L$$

$$Prob(A_j) = p_j \qquad \sum_{j=1}^{L} p_j = 1$$



Si realizáramos n pruebas, cuál es la probabilidad de:

$$Prob(k_1 \; veces \; A_1, k_2 \; veces \; A_2, \cdots, k_L \; veces A_L)$$

Ahora definimos:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & si \; la \; prueba \; i-ésima \; da \; A_j \\ 0 & si \; la \; prueba \; i-ésima \; no \; da \; A_j \end{cases}$$

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \qquad j = 1, L \qquad\qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_L \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar que:

$$P\left(X_1 = k_{1,}, X_2 = k_2, \cdots, X_L = k_L\right) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{L} k_j!} \prod_{j=1}^{L} p_j^{k_j} \qquad\qquad \sum_{j=1}^{L} k_j = n$$

La anterior es la Función de Distribución Multinomial que da la probabilidad de k_j éxitos en n pruebas.

Interpretar la binomial a partir de la multinomial.

Media y varianza de la Función de Distribución Multinomial

Mediante procedimientos análogos a los de la Distribución Binomial, podemos encontrar expresiones para los parámetros característicos de una Distribución Multinomial (cada X_j es una v.a. con Distribución Binomial).

- Medias

$$E\left[X_j\right] = np_j \qquad j = 1, L \qquad\qquad E[\bar{X}] = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_L] \end{pmatrix} = n\bar{p}$$

- Varianzas - Covarianzas

$$\sigma_{X_j}^2 = np_j\left(1 - p_j\right) \qquad j = 1, L \qquad\qquad cov\left(X_i, X_j\right) = -np_i p_j \qquad i \neq j$$

$$C = \begin{bmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 & -np_1p_L \\ -np_1p_2 & \cdots & \cdots \\ -np_1p_L & \cdots & np_L(1-p_L) \end{bmatrix}$$

Ley de los grandes números para las frecuencias de un experimento

Una situación muy frecuente es que las probabilidades de diferentes eventos, por ejemplo, las p_j de las Distribución Multinomial son desconocidas y se deben obtener mediante la realización de experimentos. Por ejemplo, podemos plantearnos si un dado está cargado.

Luego, lo que podemos hacer es experimentar y contar (medir) para calcular la frecuencia de ocurrencia del evento al que nos interesa estimar la probabilidad dada por:

$$h(X_j) = \frac{X_j}{n} \qquad X_j \qquad X_j \text{ cantidad de veces que salió el evento } A_j$$

X_j es una variable aleatoria, luego $h(X_j)$ también lo es y tiene media y varianza dadas por:

Media

$$E\left[h(X_j)\right] = E\left[\frac{X_j}{n}\right] = \frac{1}{n}E\left[X_j\right] = \frac{1}{n}\,np_j$$

$$\therefore \quad E\left[h(X_j)\right] = p_j$$

Varianza

$$\sigma^2\left(h(X_j)\right) = \sigma^2\left(\frac{X_j}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sigma^2(X_j)$$

$$\therefore \quad \sigma^2\left(h(X_j)\right) = \frac{n}{n^2}\,p_j(1-p_j) = \frac{1}{n}\,p_j(1-p_j)$$

$$\sigma\left(h(X_j)\right)\ \alpha\ \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ley de los grandes números: cuanto mayor es el tamaño de la muestra, n, más exacta es la estimación de frecuencia ya que la desviación estándar de esta es inversamente proporcional a $\sqrt{n}$.

La diferencia entre la probabilidad teórica de un evento y la probabilidad estimada a partir de una muestra se la llama '**Error estadístico**' y se original en el hecho de que toda muestra es **finita.** El 'error estadístico' es de importancia en aplicaciones que involucran el conteo de eventos individuales.

Ejemplo: supongamos que por experimentos anteriores se sabe que la fracción de moscas de la fruta que desarrolla cierta característica A cuando es expuesta a rayos X es aprox. $R \approx {}^{1}/_{200}$. Planeamos un experimento para determinar R con una exactitud del 10% y nos preguntamos qué tamaño tiene que tener la muestra para lograr esa exactitud?

$$p_A \approx R \approx {}^{1}/_{200} = 0.005 \qquad 1 - p_A \approx 1$$

n tiene que ser tal que $\quad {}^{\sigma(h_A)}/_{h_A} = 0.1$

$$\sigma^2(h_A) = (0.1\, h_A)^2 \qquad h_A \approx {p_A}^2$$

$$\sigma^2(h_A) \approx 2.5e-7$$

En la slide anterior demostramos:

$$\sigma^2(h_A) = \frac{1}{n}\, p_A(1 - p_A) \longrightarrow n = \frac{1}{\sigma^2(h_A)}\, p_A(1 - p_A)$$

$$n \approx \frac{0.005}{2.5e-7} \approx 20000$$

Ejemplo de aplicación para la cara 4 del dado:

$$p_4 \approx \frac{1}{6} \qquad \sigma^2(h_4) = \frac{1}{n}\, p_4(1-p_4) = \frac{1}{n}\,\frac{5}{36}$$

Por otro lado, si queremos una precisión del 10%:

$$\sigma(h_4)\Big/ h_A = 0.1$$

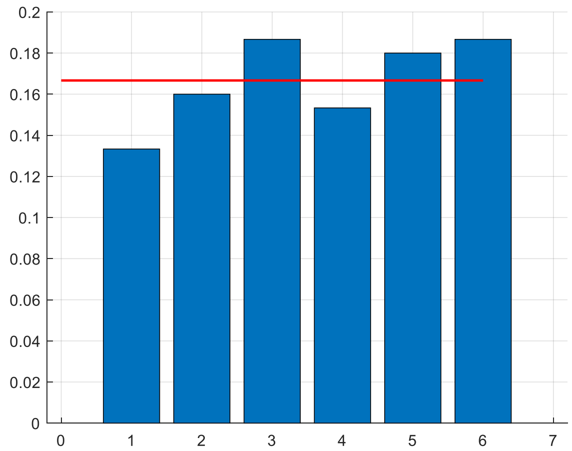
$$h_A \approx p_4$$

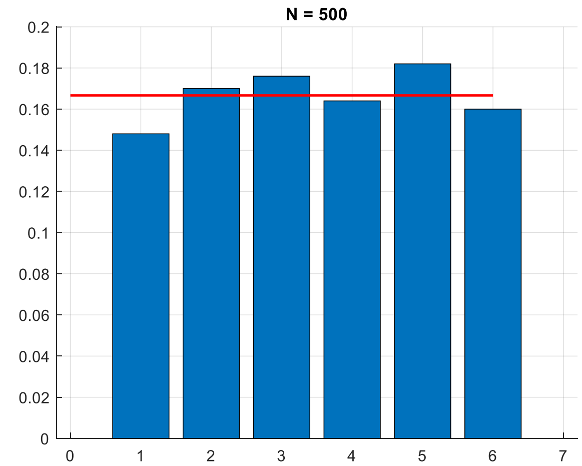
$$\longrightarrow \quad \sigma^2(h_4) = \left(0.1\ \frac{1}{6}\right)^2 = 2.778e-4$$

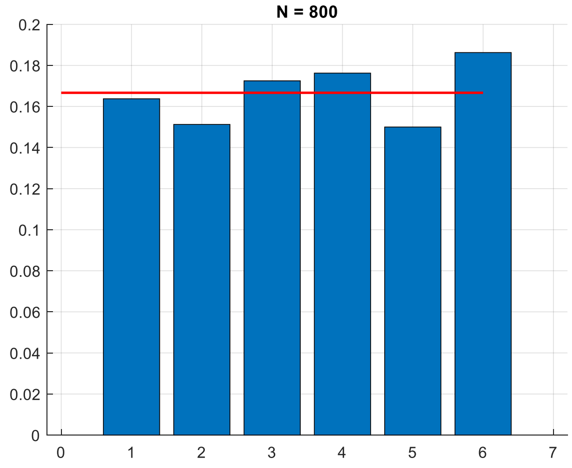
Combinando las dos expresiones anteriores:

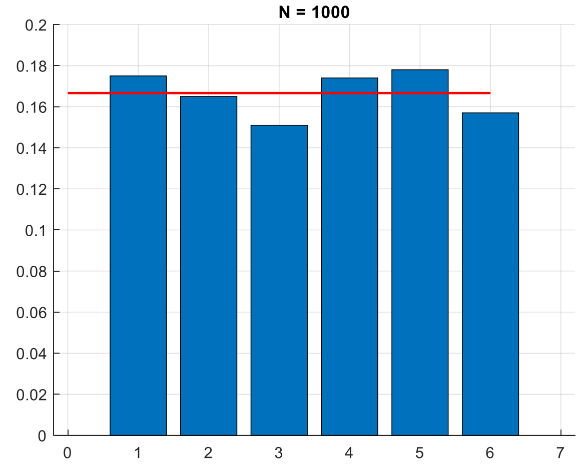
$$\frac{1}{n}\,\frac{5}{36} = 2.778e-4 \quad \longrightarrow \quad n = \frac{5}{2.778e-4 \ * 36} \approx 500$$

Experimento del lanzamiento de un dado: probabilidad empírica de obtener una cara en particular.









3. Función de Distribución de Poisson

Consideremos qué pasa con la Distribución Binomial cuando el número de repeticiones es muy grande al mismo tiempo que la probabilidad de 'éxito' es muy pequeña y definimos $\lambda = np$.

Binomial K $$P(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k \, q^{n-k}$$

Para:

$n \to \infty$
$p \to 0$ $\lambda \equiv np$

$$P(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n * \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

Para $n \to \infty$ y $p \to 0$, los términos a la derecha del * se hacen 1 y sabemos que si $n \to \infty, \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$ el desarrollo en Taylo de $e^{-\lambda}$.

Luego:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \lambda > 0$$

La anterior es la Función de Distribución de Poisson que da la probabilidad de k éxitos conociendo el parámetro λ. Está definida para enteros positivos.

Verificación de la probabilidad total:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = 1$$

Parámetros de la Distribución de Poisson

Media

$$E[K] = \sum_{k=0}^{\infty} k \, \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E[K] = \sum_{k=1}^{\infty} k \, \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

$$E[K] = \lambda \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} e^{-\lambda}$$

$\therefore \quad \mu_K = \lambda$ $\qquad$ λ es la media

Varianza

Primero buscamos:

$$E[K^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$$

$$E[K^2] = \lambda(\lambda + 1)$$

Por otro lado, sabemos:

$$\mathrm{var}(K) = E[K^2] - (E[K])^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2$$

$\therefore$

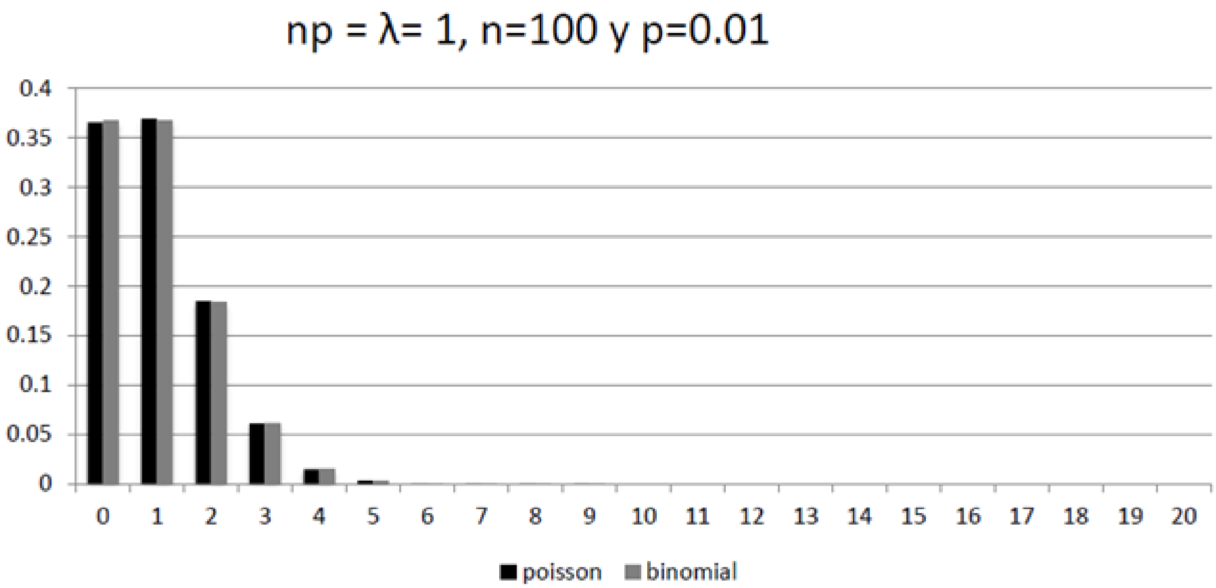
$\sigma_K^2 = \lambda$ λ también es la varianza

Sesgo

$\gamma_K = \gamma^{-\frac{1}{2}}$ Cuanto mayor es λ, más simétrica se vuelve la función.

Repaso:

La Función de Distribución de Poisson es la forma a la que tiende la Distribución Binomial cuando $n \to \infty$ y $p \to 0$, y queda definida a partir de un único parámetro $\lambda = np$.



Elementos característicos asociados a una Distribución de Poisson

- Aplica a situaciones de ‘conteos’, cantidad de ocurrencias de cierto evento en cierto intervalo de tiempo o porción del espacio, cada uno de estos intervalos o porciones es llamado ‘unidad de ensayo’.

- La probabilidad de ocurrencia del evento no cambia y es igual para todos los ensayos.

- El valor espero o valor promedio de ‘conteos’ es proporcional al tamaño de la unidad de ensayo.

- Cada evento corresponde a una única unidad de ensayo.

- El ‘conteo’ sobre una unidad de ensayo es independientes de los otros ‘conteo’ de las otras unidades.

- La Distribución de Poisson expresa la probabilidad de que ocurra un número de eventos en un intervalo fijo de tiempo o espacio (distancia, área, volumen), si estos eventos ocurren a una tasa media constante e independiente del tiempo transcurrido desde el último evento.

Ejemplo de interpretación de la Distribución de Poisson

Supongamos un dado con 10 caras numeradas de 1 a 10 (o un mazo de 10 cartas numeradas de 1 a 10) donde todas tienen igual probabilidad de salir.

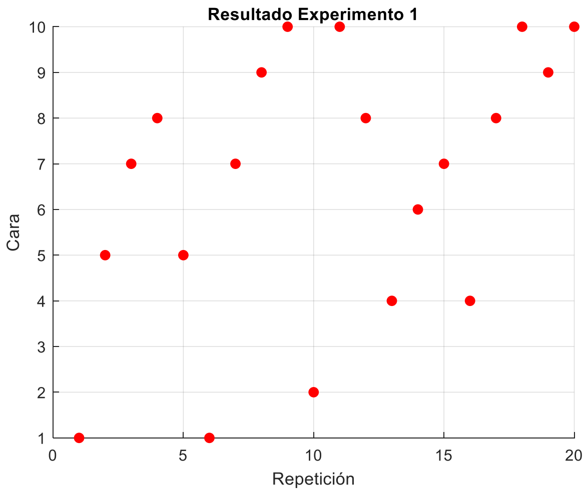
El experimento consiste en realizar 20 tiradas del dado (sacar una carta y reponerla) y el 'éxito' está definido por 'sacar 4'.

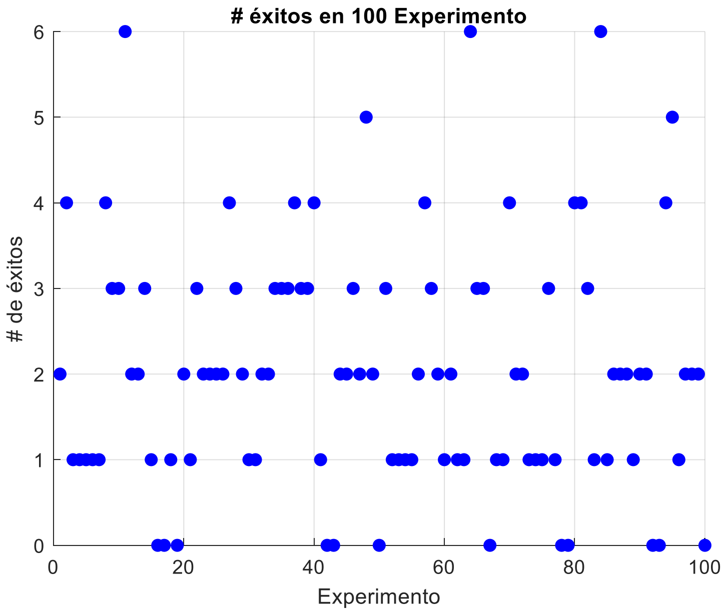
El planteo lleva a considerar una Distribución Binomial:

$$P(k) = \frac{20!}{k!\,(20-k)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{20-k}$$

$$k = (0, 1, \cdots, 20)$$

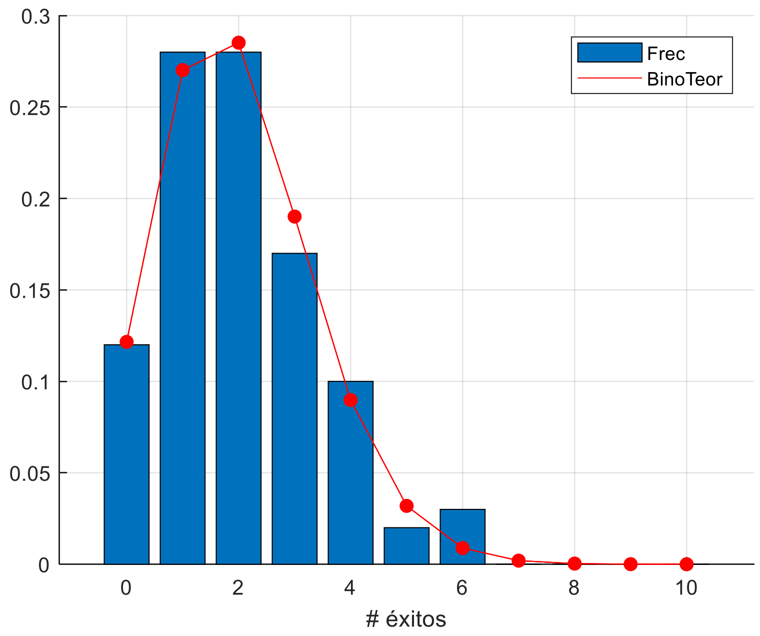
Luego, repetimos 100 veces el experimento y realizamos una tabla que sea Cantidad de éxitos - Cantidad de experimentos.





Experimento	# éxitos (# de 4s)
1	2
…	
100	0

# éxitos	# experimentos
0	12
1	28
2	28
3	17
4	10
5	2
6	3
7	0



Ejemplo de interpretación de la Distribución de Poisson

Supongamos ahora que en lugar de 20, hacemos 200 tiradas

Planteando una Distribución Binomial tendríamos:

$$P(k) = \frac{200!}{k!\,(200-k)!}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{200-k}$$

Luego, repetimos 100 veces el experimento y realizamos una tabla que sea Cantidad de éxitos - Cantidad de experimentos.

Experimento	# éxitos (# de 4s)
1	n1
…	
100	0

# éxitos	# experimentos
0	m_1
…	…
L	m_L

Sin embargo, como tenemos p relativamente pequeño y n relativamente grande, la distribución resultante se podrá representar con una Distribución de Poisson con $\lambda = 200 * \frac{1}{10}$

Distribución de Poisson Teórica (en verde)

$$\lambda = 200\,\frac{1}{10} = 20$$

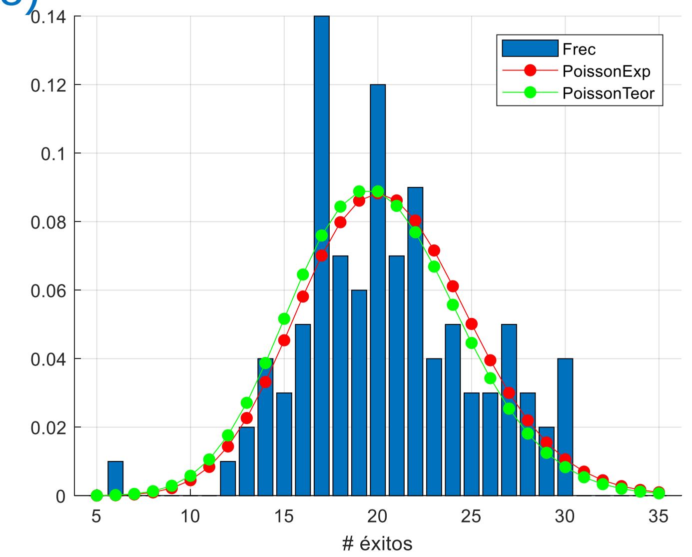
$$P(k) = \frac{20^k}{k!}e^{-20}$$

Distribución de Poisson Experimental (en rojo)

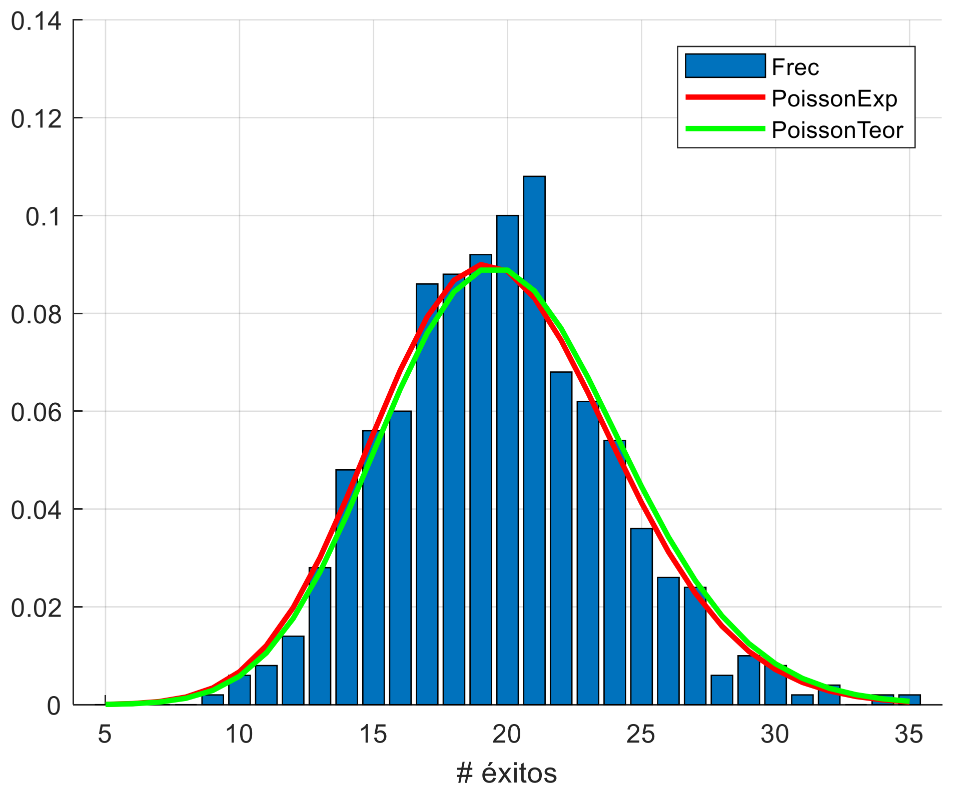
$$\lambda \approx promedio\ de\ éxitos\ por\ experimento$$

$$\lambda \approx 20.5$$

$$P(k) = \frac{20.5^k}{k!}e^{-20.5}$$



Luego, si en lugar de 100, hacemos 500 experimentos (500 veces 20 tiradas):



Al utilizar la Distribución de Poisson ya no es necesario conocer los parámetros de la Distribución Binomial y el único parámetro que importa es λ.

Por esto mismo, en la situación más general el λ teótico, $\lambda = np$, es desconocido y hay que estimarlo como :

$$\lambda \approx promedio\ de\ \text{é}xitos\ por\ experimento$$

Independientemente de la forma en que obtuvimos la Distribución de Poisson, esta resulta muy útil en situaciones de 'conteos' en las que los parámetros n y p no son accesibles, pero si se puede obtener el parámetro λ como el valor promedio de los 'conteos'.

Ejemplo: Distribución de Poisson aplicada al decaimiento de elementos radioactivos.

Consideremos el núcleo radioactivo con vida media τ y que observamos durante un tiempo $\mathrm{T} \ll \tau$. La probabilidad de que decaiga en este tiempo es $\mathrm{W} \ll 1$. Dividimos el intervalo T en m subintervalos de duración t. La probabilidad de que el núcleo decaiga en un subintervalo particular es $p \approx \frac{W}{m}$.

Consideremos ahora que observamos una fuente radioactiva con N núcleos que decaen de forma independiente durante un intervalo t y contamos la cantidad de decaimientos en cada subintervalo de manera de obtener una tabla:

Intervalo	Conteo
1	a_1
…	
m	a_m

Conteo	# intervalos
0	m_1
…	
inf	m_{inf}

$$\sum_{j=1}^{inf} m_j = m$$

Calculamos las frecuencias:

$$h(k) = \frac{m_k}{m}$$

$h(k)$ tendrá una Distribución de Poisson con: $\lambda \approx \frac{1}{\sum_{j=1}^{inf} m_j} \sum_{j=1}^{inf} j * m_j$

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Interpretación gráfica de la transformación Binomial -> Poisson

$$P(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,p^k\, q^{n-k}$$

$$\Downarrow$$

$$n \to \infty \qquad \lambda \equiv np$$
$$p \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}$$

Ejemplo de uso de una distribución de Poisson

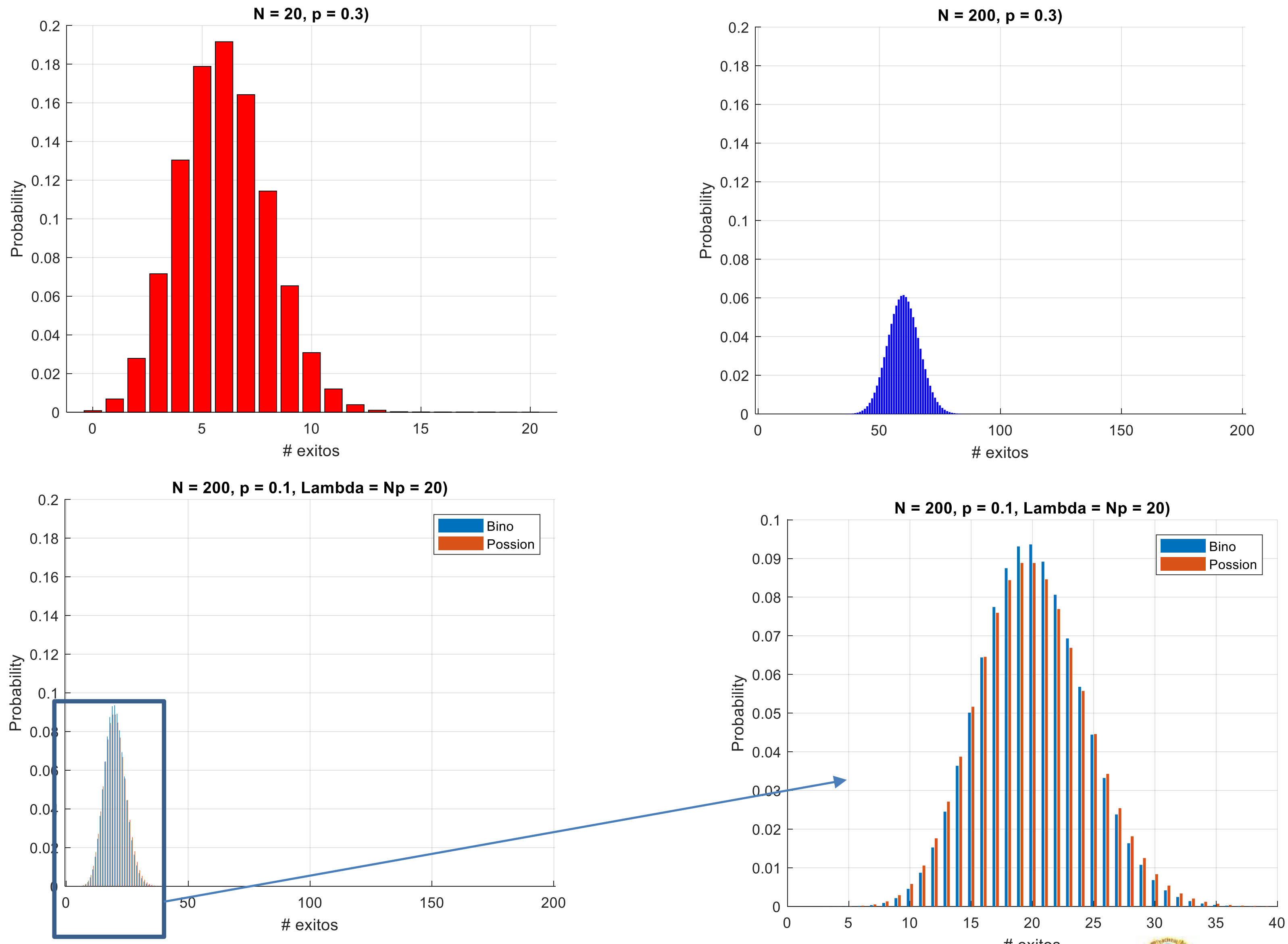
For instance, a call center receives an average of 180 calls per hour, 24 hours a day. The calls are independent; receiving one does not change the probability of when the next one will arrive. The number of calls received during any minute has a Poisson probability distribution with mean 3. The most likely number of calls received are 2 and 3, but 1 and 4 are also likely. There is a small probability of it being as low as zero and a very small probability it could be 10 or even higher.

The Poisson distribution can be applied to systems with a large number of possible events, each of which is rare. The number of such events that occur during a fixed time interval is, under the right circumstances, a random number with a Poisson distribution.

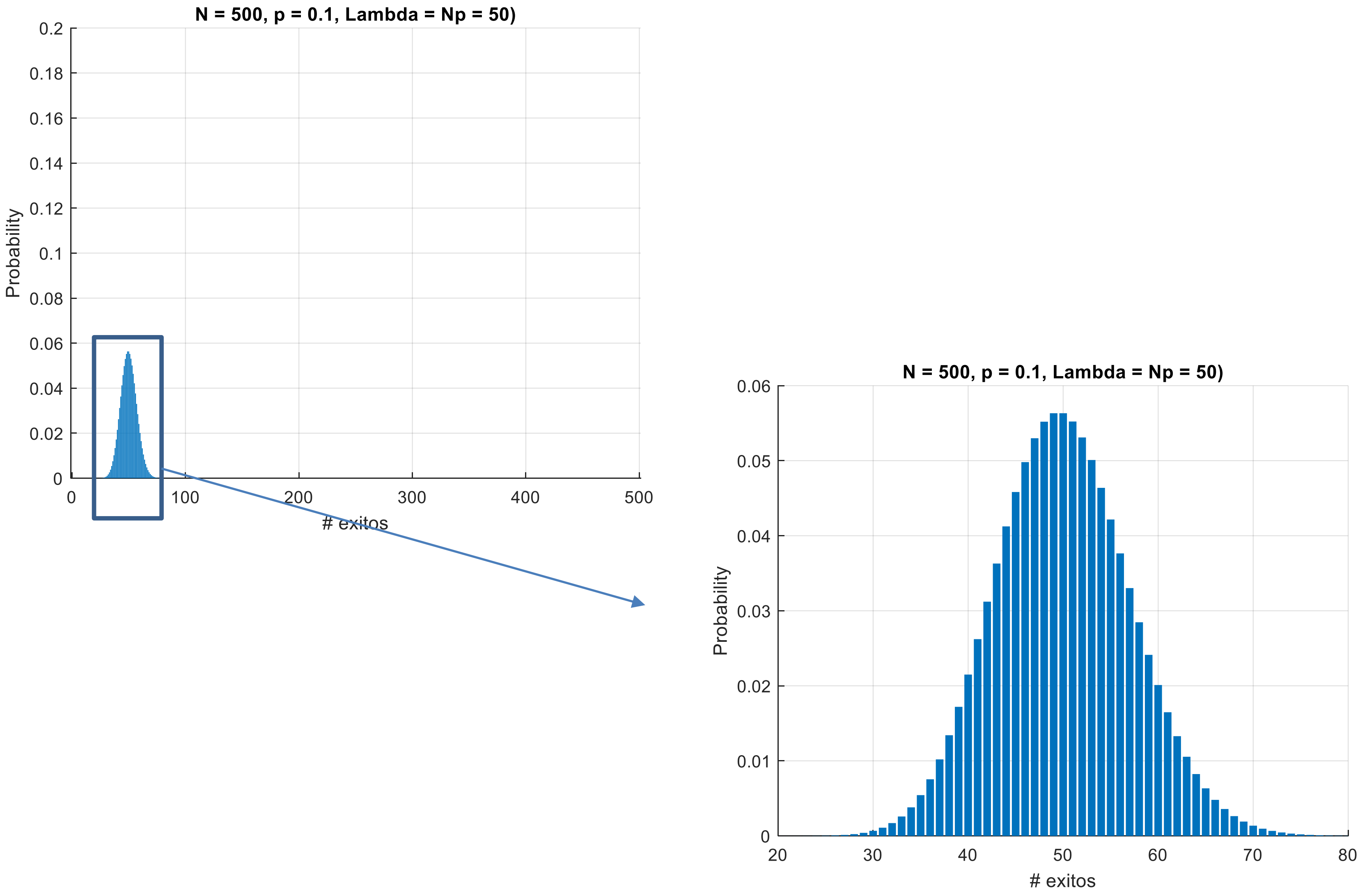
The equation can be adapted if, instead of the average number of events λ, we are given the average rate r at which events occur

$$P(k \text{ events in interval } t) = \frac{(rt)^k e^{-rt}}{k!}.$$

Interpretación gráfica de la transformación Binomial -> Poisson



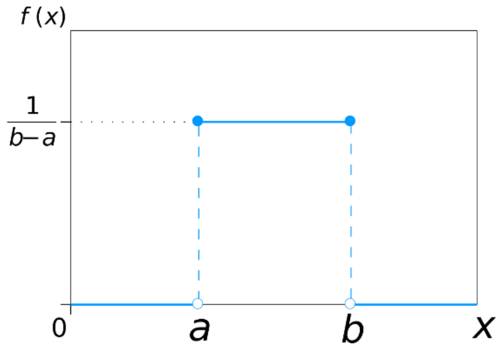
Interpretación gráfica de la transformación Binomial -> Poisson



4. Función de densidad de probabilidad Uniforme

Es una función de densidad de probabilidad definida para una variable aleatoria continua como:

$$f(x) = \begin{cases} C & a \leq x \leq b \\ 0 & resto \end{cases}$$



Expresión de la constante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\int_{a}^{b} c\, dx = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{b-a}$$

Discutir la forma de la curva cuando a y b están próximos y cuando están alejados.

Parámetros de la función de densidad Uniforme

Media

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_a^b x\, \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx$$

$$\mu_X = \frac{1}{2}(a+b)$$

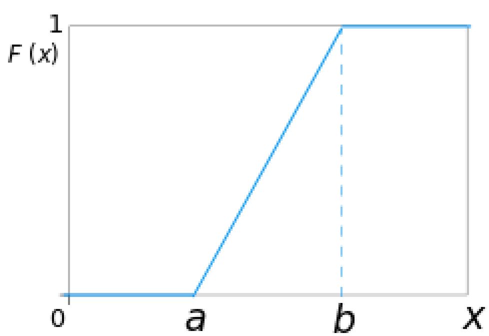
Varianza

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2\, f(x)\, dx = \int_a^b (x-\mu_X)^2\, f(x)\, dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

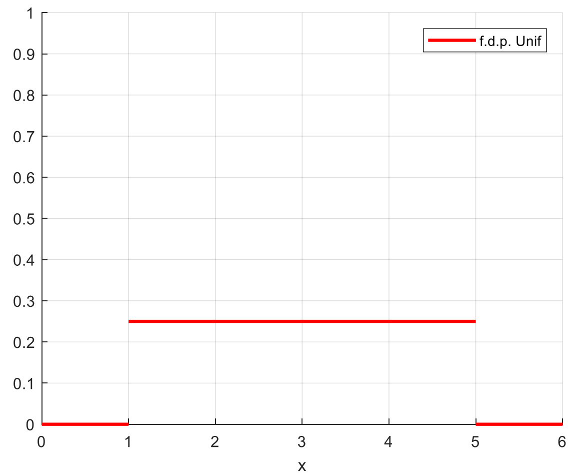
Función de distribución o acumulativa

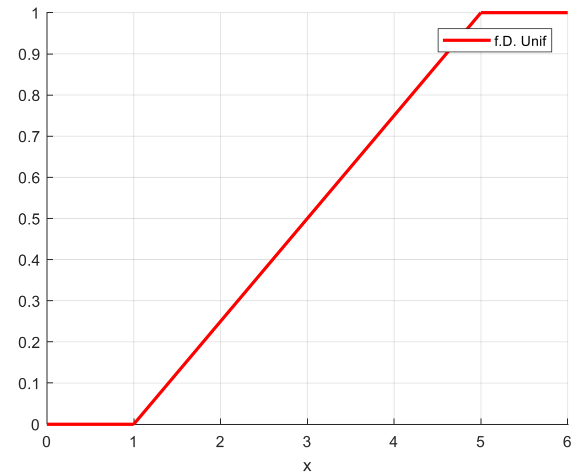
$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, x < a \\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^x dt = \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b \\ 1, x > b \end{cases}$$



Ejemplo de una función densidad de probabilidad Uniforme y su función distribución





Densidad de probabilidad uniforme estándar para $a = 0, b = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Ejemplo: rueda de la fortuna. Aclaración de dif. entre probabilidad y densidad de probabilidad.
Juegos de azar, uniforme discreta.

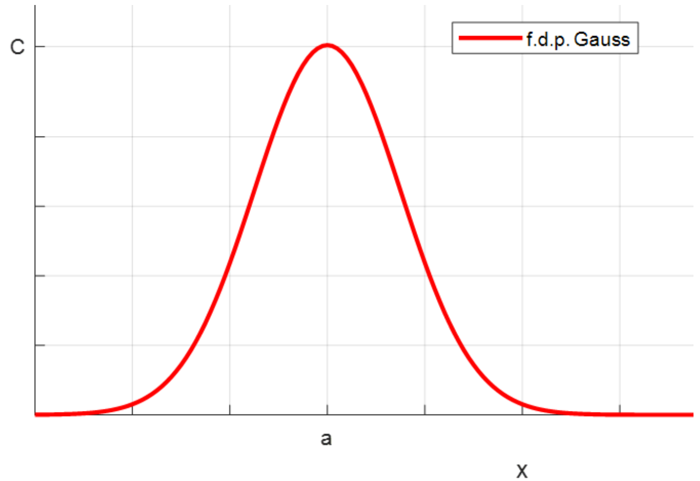
5. Función de densidad de probabilidad de Gauss (o Normal)

Es una función **fundamental** en estadística y está definida por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{b^2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$a \; y \; b \; reales$$

Forma de 'campana' simétrica en torno a a



$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b}$$

Parámetros de la densidad de probabilidad de Gauss

Debemos aceptar
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = 1$$

Media

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{b^2}}dx$$

$$z = \frac{x-a}{b} \qquad dz = \frac{dx}{b}$$

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} (bz+a)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$\mu_X = \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2}dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

Igual a 0 por Impar

$$\mu_X = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$\therefore \qquad \mu_X = a$$

Varianza

$$\sigma_X^2 = E[(x-\mu_X)^2] = E[X^2] - \mu_X^2$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{b^2}} dx$$

$$z = \frac{x-a}{b} \qquad dz = \frac{dx}{b}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (bz+a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$E[X^2] = \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Igual a 0 por Impar

$$E[X^2] = \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + a^2$$

Por partes: $dv = z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, u = z$

$$E[X^2] = -\frac{b^2}{\sqrt{2\pi}} z\, e^{-\frac{1}{2}z^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + a^2$$

Va a 0 por ser A - A

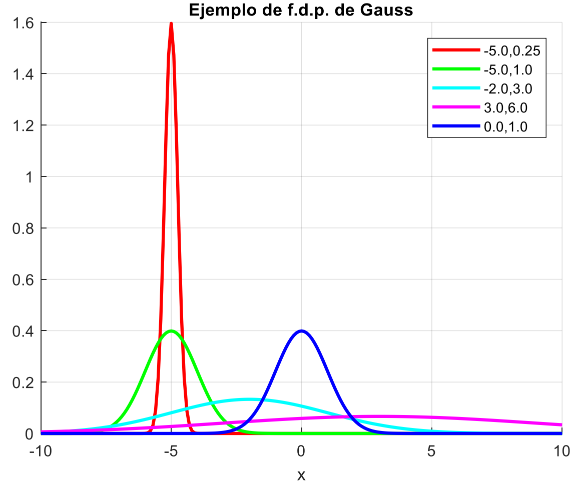
$$E[X^2] = b^2 + a^2$$

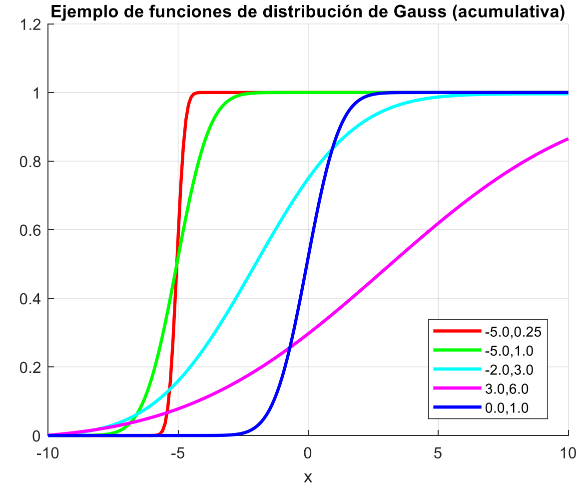
$$\sigma_X^2 = b^2 + a^2 - a^2$$

$$\therefore \quad \sigma_X^2 = b^2$$

Luego:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}}$$





Propiedades:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}}\,dx = 1$$

Simétrica en torno a μ luego esta es también la media y la moda.

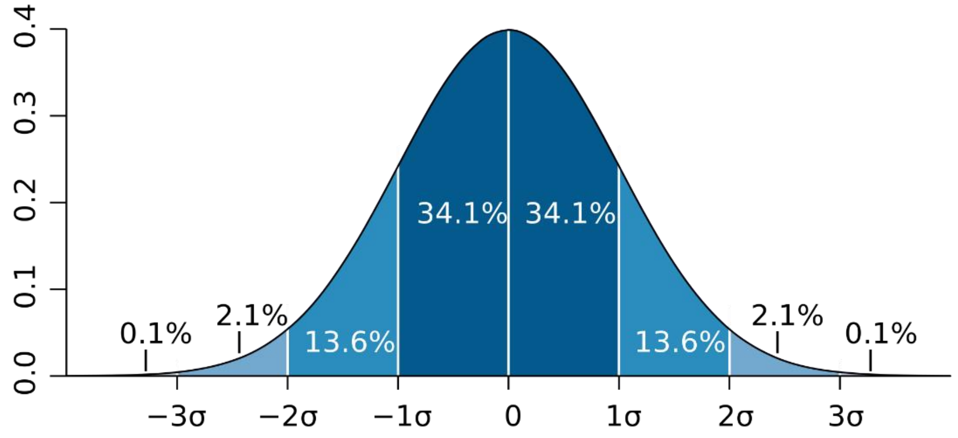
$x = \mu_X - \sigma_X$ y $x = \mu_X + \sigma_X$ marcan los puntos de inflexión de la función.

Probabilidades importantes:

$$P(|x - \mu_X| \leq \sigma_X) = 0.68$$

$$P(|x - \mu_X| \leq 2\sigma_X) = 0.954$$

$$P(|x - \mu_X| \leq 3\sigma_X) = 0.998$$



Estandarización:

$$x' = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}$$

Densidad de probabilidad normal estándar: $\mu_{X'} = 0, \sigma_{X'} = 1$:

$$f(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x'^2}$$

Curvas azules en las figuras de la slide anterior

Definiendo $\psi_0(x) = P(X' < x)$ (acumulativa normalizada, X' normal estandarizada)

Por simetría: $P(|X'| > x) = 2\psi_0(-|x|) = 2(1 - |x|)$

Interpretación de la desviación estándar: si la desviación estándar de un instrumento es conocida y uno realiza una medición individual, las expresiones de arriba indican que el valor verdadero estará dentro de mas/menos sigma con probabilidad 68%.

Ejemplo de tabla de Distribución Normal estandarizada

La f.d.p. de Gauss (o la normal estándar) no tiene primitiva por lo que las integrales hay que obtenerlas mediante tablas o del uso de aplicaciones que calcule numéricamente la integral.

Table I.2: Normal distribution $\psi_0(x)$.

$$P(\mathsf{x} < x) = \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
−2.9	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
−2.8	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
−2.7	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
−2.6	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
−2.5	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
−2.4	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006
−2.3	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008
−2.2	0.014	0.014	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011
−2.1	0.018	0.017	0.017	0.017	0.016	0.016	0.015	0.015	0.015	0.014
−2.0	0.023	0.022	0.022	0.021	0.021	0.020	0.020	0.019	0.019	0.018
−1.9	0.029	0.028	0.027	0.027	0.026	0.026	0.025	0.024	0.024	0.023
−1.8	0.036	0.035	0.034	0.034	0.033	0.032	0.031	0.031	0.030	0.029
−1.7	0.045	0.044	0.043	0.042	0.041	0.040	0.039	0.038	0.038	0.037
−1.6	0.055	0.054	0.053	0.052	0.051	0.049	0.048	0.047	0.046	0.046
−1.5	0.067	0.066	0.064	0.063	0.062	0.061	0.059	0.058	0.057	0.056
−1.4	0.081	0.079	0.078	0.076	0.075	0.074	0.072	0.071	0.069	0.068
−1.3	0.097	0.095	0.093	0.092	0.090	0.089	0.087	0.085	0.084	0.082
−1.2	0.115	0.113	0.111	0.109	0.107	0.106	0.104	0.102	0.100	0.099
−1.1	0.136	0.133	0.131	0.129	0.127	0.125	0.123	0.121	0.119	0.117
−1.0	0.159	0.156	0.154	0.152	0.149	0.147	0.145	0.142	0.140	0.138
−0.9	0.184	0.181	0.179	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161
−0.8	0.212	0.209	0.206	0.203	0.200	0.198	0.195	0.192	0.189	0.187
−0.7	0.242	0.239	0.236	0.233	0.230	0.227	0.224	0.221	0.218	0.215
−0.6	0.274	0.271	0.268	0.264	0.261	0.258	0.255	0.251	0.248	0.245
−0.5	0.309	0.305	0.302	0.298	0.295	0.291	0.288	0.284	0.281	0.278
−0.4	0.345	0.341	0.337	0.334	0.330	0.326	0.323	0.319	0.316	0.312
−0.3	0.382	0.378	0.374	0.371	0.367	0.363	0.359	0.356	0.352	0.348
−0.2	0.421	0.417	0.413	0.409	0.405	0.401	0.397	0.394	0.390	0.386
−0.1	0.460	0.456	0.452	0.448	0.444	0.440	0.436	0.433	0.429	0.425
0.0	0.500	0.496	0.492	0.488	0.484	0.480	0.476	0.472	0.468	0.464

Table I.2: (continued)

$$P(\mathsf{x} < x) = \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

Ejemplo de aplicación de f.d.p. de Gauss.

La f.d.p. de Gauss se encuentra en el comportamiento de muchas variables de la naturaleza y en otros casos, se utiliza como aproximación para representarlas.

Por ejemplo, registros históricos de las temperaturas de una ciudad para el mes de junio tiene una función de Gauss con media 23° y desviación estándar de 5°. A partir de esta información, queremos determinar:

a) la probabilidad de que tomando un día al azar del mes de junio, la temperatura se encuentre entre 21 ° y 27 °.
b) la cantidad esperada de días del mes de junio con temperaturas en ese rango.

a) $P(21° \leq T \leq 27°)$ T v.a. con f.d.p. de Guass de $\mu_T = 23°, \sigma_T = 5°$:

$$P(21° \leq T \leq 27°) = P\left(\frac{21° - 23°}{5°} \leq T' \leq \frac{27° - 23°}{5°}\right)$$

$$P(21° \leq T \leq 27°) = P(-0.4 \leq T' \leq 0.8) = \int_{-0.4}^{0.8} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx'$$

Usando la tabla: $P(21° \leq T \leq 27°) = 0.443$

b) Número esperado de días de mes de junio: $N\,p = 30 * 0.443 \approx 13\, d$

Galton board