

Método MonteCarlo

En las clases pasadas hemos hablado de observación (medición) de variables aleatorias pero no hemos dicho nada de cómo generarlas (simularlas). En muchas situaciones es útil disponer de una secuencia de valores de una variable aleatoria X asociada a una f.d.p. específica. El procedimiento correcto para esto sería utilizar un proceso estadístico (e.g. medidas de tiempo entre dos decaimientos de una fuente radioactiva) y luego procesar los resultados en la computadora. En la práctica, los valores aleatorios son calculados directamente en la computadora, por lo que los valores resultantes no son del todo aleatorios de aquí que se los llama pseudo-aleatorios.

Método de MonteCarlo refiere a una clase de algoritmos computacionales que se basan en la generación/simulación de series de valores aleatorios para resolver problemas de forma numérica. Son muy utilizados en ciencia y tecnología para problemas que son difíciles o imposibles de resolver mediante otra aproximación.

En las slides siguientes veremos la aplicación de MonteCarlo para generar series de valores de una distribución de probabilidad.



1. Valores con f.d.p. uniforme – Generadores de números aleatorios

El punto de partida de la aplicación de MonteCarlo para distribuciones de probabilidad es la generación, mediante algoritmos informáticos, de una serie de valores que provengan de una distribución uniforme en $[0,1]$.

Para esto, utilizamos los Generadores de números aleatorios.

Ventajas de los generadores:

- Rápidos
- Fáciles de implementar
- Permiten reproducir las secuencias infinitas veces

Desventaja fundamental:

- Las secuencias no son realmente aleatorias porque se obtienen con operaciones deterministas. Por esto, las secuencias así obtenidas se llaman pseudo-aleatorias que cumplen algunas características básicas.



Características básicas que las secuencias de valores obtenidas a partir de Generadores aleatorios deben cumplir:

- Corresponden a una f.d.p. uniforme
- Estadísticamente independientes
- Su media debe ser estadísticamente igual a 1/2.
- Su varianza debe ser estadísticamente igual a 1/12.
- Su período o ciclo de vida debe ser largo (cantidad de valores antes de que se repita la secuencia).

Esquema general de un generador de números aleatorios consiste en una relación de recurrencia y un valor o conjunto de valores iniciales. También puede haber un tercer paso de transformación al rango $[0,1]$.

- Relación de recurrencia simple

$$N_i = Gen(N_{i-1}) \quad i = 1, \dots, m \quad N_0$$

- Relación de recurrencia de orden k

$$N_i = Gen(N_{i-1}, \dots, N_{i-k}) \quad i = k + 1, \dots, m$$

$$N_0, \dots, N_k$$

Valores iniciales diferentes generan series diferentes.



Ejemplo de generador de números pseudo-aleatorios

$$N_i = Gen(N_{i-1}) = \text{mod}(2^{12}) (5 N_{i-1} + 13) \quad N_0$$

Transformación a $[0,1]$: $X_i = \frac{N_i}{2^{12}}$

$$N_0 = 1$$

i	N_i	X_i
0	1	1/4096
1	18	18/4096
2	103	103/4096
3

$$N_0 = 2000$$

i	N_i	X_i
0	2000	2000/4096
1	1821	1821/4096
2
3



2. Valores con f.d.p. arbitraria

El objetivo de este algoritmo es obtener una secuencia de valores asociados a cualquier función de densidad de probabilidad.

El esquema general es partir de una secuencia (o secuencias) con valor distribuidos uniformemente en $[0,1]$ y transformarlos.

Caso 1: secuencia de valores y_i con f.d.p. $g(y)$ simple.

X variable aleatoria con f.d.p $f(x)$ uniforme en $[0,1]$

Y variable aleatoria con f.d.p $g(y)$

Para transformar X en Y habrá una relación $y = y(x)$ tal que:

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \longrightarrow g(y)dy = dx$$
$$\int_{-\infty}^y g(y')dy = \int_0^x dx'$$
$$G(y) = x$$
$$y = G^{-1}(x)$$

La función $G^{-1}(x)$ transformar una serie uniforme en otra con f.d.p. $g(y)$



Caso 2: Método de aceptación/rechazo de van Neumann

Se aplica cuando conocemos $g(y)$ pero no es posible encontrar $y = G^{-1}(x)$. También se puede aplicar cuando ésta se conoce.

Supongamos que el rango de variación de y es $a \leq y \leq b$ y que $g_{max} = \max(g(y))$.

El método consiste en generar una secuencia de pares, (u_i, v_i) , donde u_i v.a. con f.d.p. uniforme en $[a, b]$ y v_i v.a. con f.d.p. uniforme en $[0, g_{max}]$.

El paso siguiente es descartar todos los valores u_i tales que:

$$g(u_i) \geq v_i$$

Los valores remanentes tendrán un f.d.p. $g(y)$

Usar scrip de Matlab MonteCarloEjemplos.m



Ejemplo del Método de MonteCarlo para una aplicación general (no relacionada a probabilidades)

Determinación del valor de π mediante la generación de pares (x, y) aleatorios dentro del cuadrante $(0,1), (0,1)$ y el conteo de puntos contenidos por la circunferencia con radio igual a 1

$$Area_{\text{cuarto de circunsf}} = \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{\pi}{4}$$

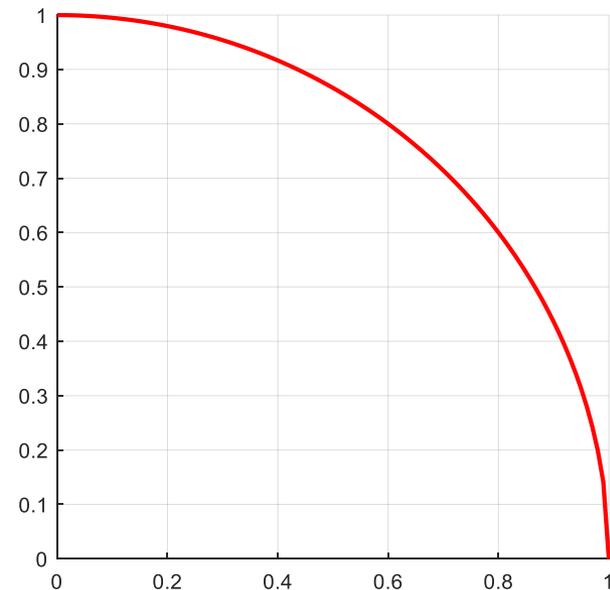
$$Conteo = \rho Area_{\text{cuarto de circunsf}} = \rho \frac{\pi}{4}$$

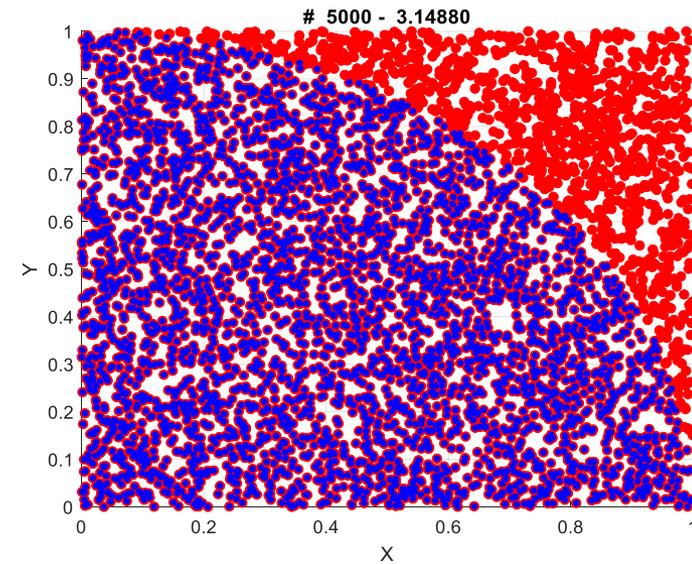
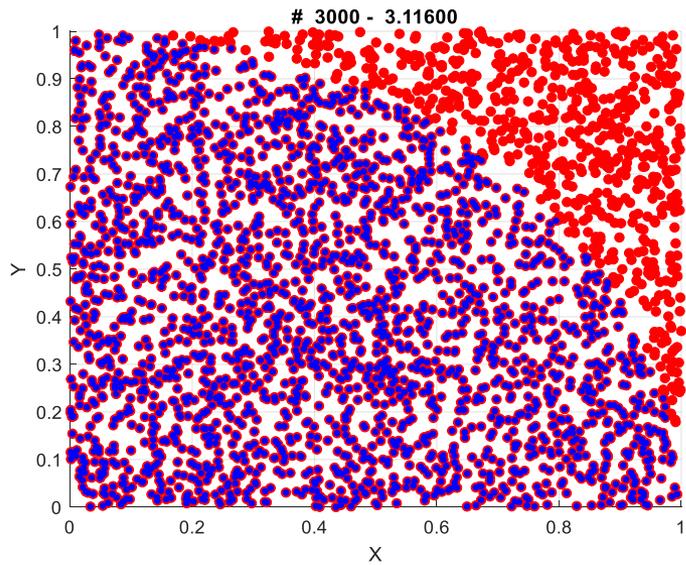
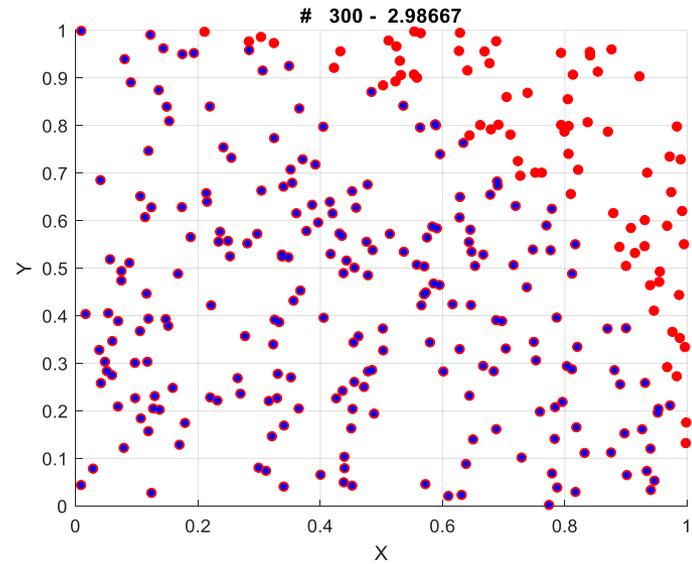
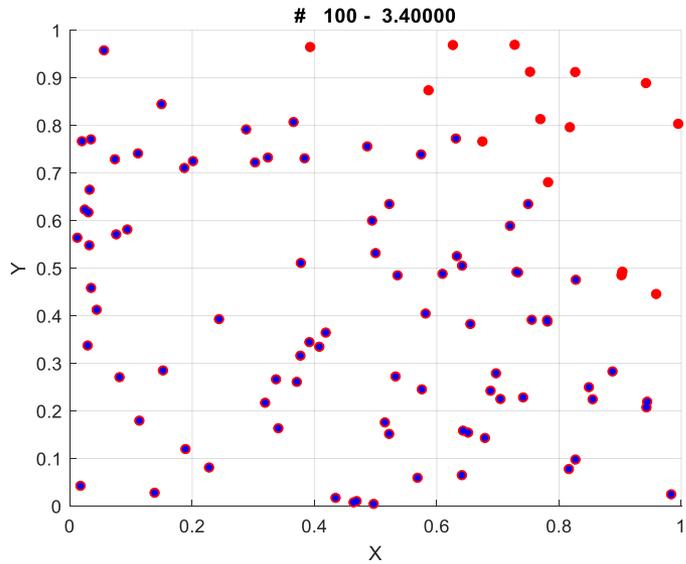
Por otro lado:

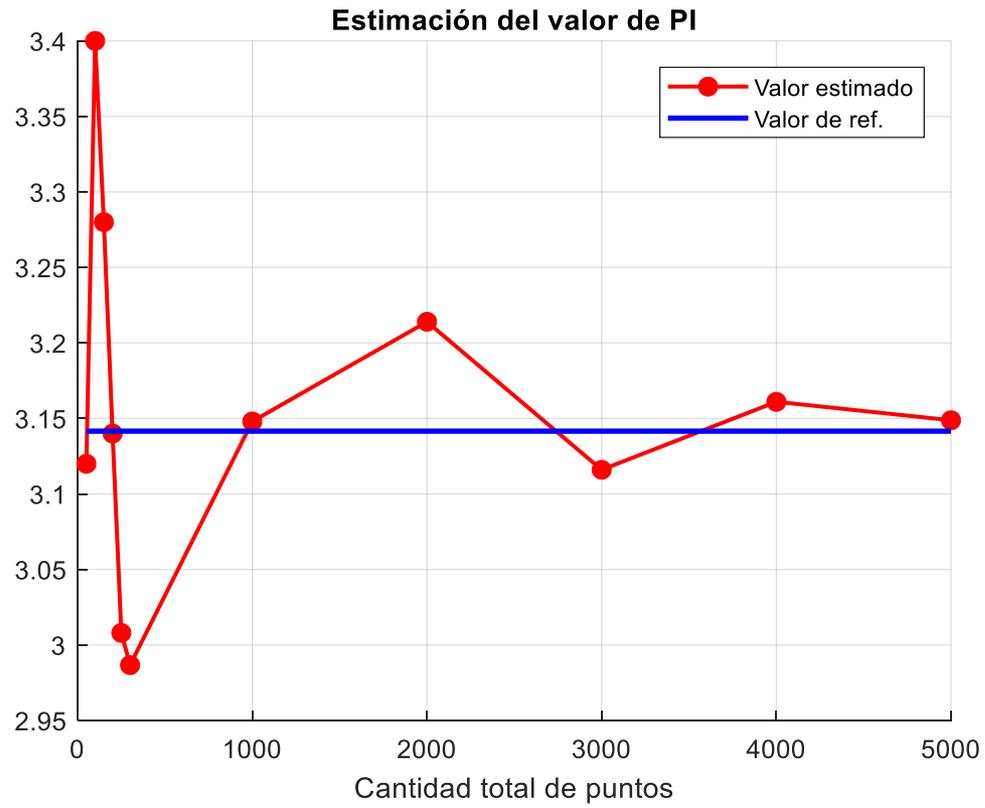
$$\rho = \frac{N_{Total}}{Area_{Cuadrante}} = \frac{N_{Total}}{1}$$

Luego:

$$\pi \approx \frac{4 \text{ Conteo}}{N_{Total}}$$

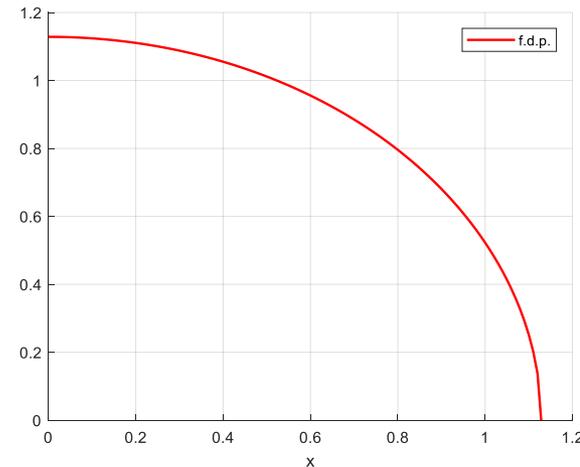






Ejemplo del Método de MonteCarlo para una aplicación de probabilidades.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{\pi} - x^2}, & 0 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$



Genero una secuencia de pares, (X_i, Y_i) , donde X_i v.a. con f.d.p. uniforme en $\left[0, \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]$ y y_i v.a. con f.d.p. uniforme en $\left[0, \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]$.

Descartar todos los valores x_i tales que:

$$g(x_i) \geq y_i$$

