# Función distribución de una variable aleatoria

*Resumen clases anteriores*

En las primeras clases analizaron situaciones en las que:

- un experimento puede dar un conjunto de resultados (eventos Ai)
- no es posible predecir con certeza cuál será el resultado
- es posible asociar una probabilidad de ocurrencia a cada evento.

Ejemplos simples de lo anterior es analizar los resultados posibles de lanzar una moneda o un dado.

***Variable aleatoria***

Es una forma simple de gestionar de forma analítica las situaciones anteriores consistente en asociar a cada evento Ai un número real i. De esta manera, cada evento puede caracterizarse por un único valor de una *variable aleatoria*; el resultado del experimento es una *variable aleatoria (v.a.)*.

Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas.

## *Ejemplos variable aleatoria*

- Ej.1: En el experimento de arrojar una moneda podemos asociar ´cara´ con el número 0 y ´cruz´ con el 1. De esa manera generamos una v.a. discreta que puede tomar dos valores: 0 o 1.

- Ej. 2: En el experimento de arrojar un dado con seis caras podemos asociar la cara resultante a una variable que de el número de la cara. De esta manera generamos un v.a. discreta que puede tomar los valores: 1, 2 ,3, 4, 5, 6.

- Ej.3: Si se busca estudiar el número de billetes en circulación como función de su antigüedad, la más forma más conveniente de abordar el problema será utilizar el año de impresión de cada billete como una v.a. discreta, e.g. x 0 1949, 1950, …

- Ej.4: Cualquier proceso productivo o de medición está sujeto a imperfecciones o fluctuaciones que llevan a variaciones en el resultado, que puede ser descrito por una o varias v.a. continuas.

- Ej.5: Encuentre la función de probabilidad del experimento consistente en tirar dos dados de dos caras y definir una v.a. que sea la suma de las caras.

## *Función de distribución de una variable aleatoria (Función acumulativa)*

Sea X una variable aleatoria y sea x un número real, entre -∞ y +∞, y queremos estudiar la probabilidad del evento X < x.

Esta probabilidad es una función de x que se llama *Función de Distribución* o *Función Distribución acumulativa (Función acumulativa)* dada por:

$$F(x) = P(X < x)$$

Algunos resultados (características) de la función de distribución:

1) $\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} P(X < x) = P(X \in E) = 1$

2) $P(X \geq x) = 1 - F(x) = 1 - P(X < x)$

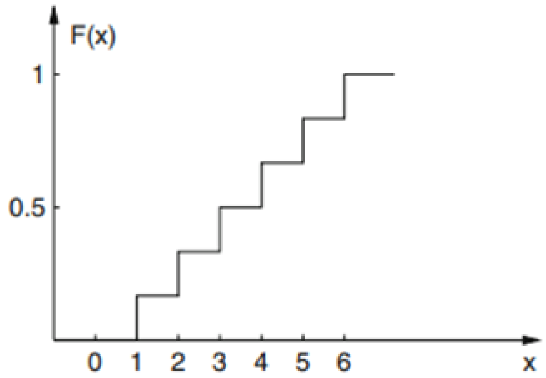
3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X < x) = 1 - \lim_{x \to -\infty} P(X \geq x) = 0$

Ejemplo: la Función de distribución que surge de tirar un dado.

$$Cara\ i \ \rightarrow P(x = i) = 1/6$$

$$F(x) = P(X < x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sum_{i=1}^{k\ (xk<x)} P(X = \ xi)$$

Representación gráfica:



## *Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua*

Las funciones de distribución de mayor interés son continuas y diferenciables. Esto permite definir la *función de densidad de probabilidad lineal* (o simplemente *densidad de probabilidad*) de una variable aleatoria como:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Interpretación:

$$P(X < x + dx) = F(x + dx)$$

$$P(X < x) = F(x)$$

$$\Rightarrow \quad P(x \leq X < x + dx) = F(x + dx) - F(x)$$

$$\Downarrow$$

$$P(x \leq X < x + dx) = f(x)dx$$

Prob. de que $x \leq X < x + dx$

Entonces, para una función de distribución continua y diferenciable, la función densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Reescribiendo la ecuación en forma integral:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Luego:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$\Downarrow$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x_1} f(t)dt$$

$$\Downarrow$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

## Luego, podemos plantear:

$$F(-\infty) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(t)dt = 0$$

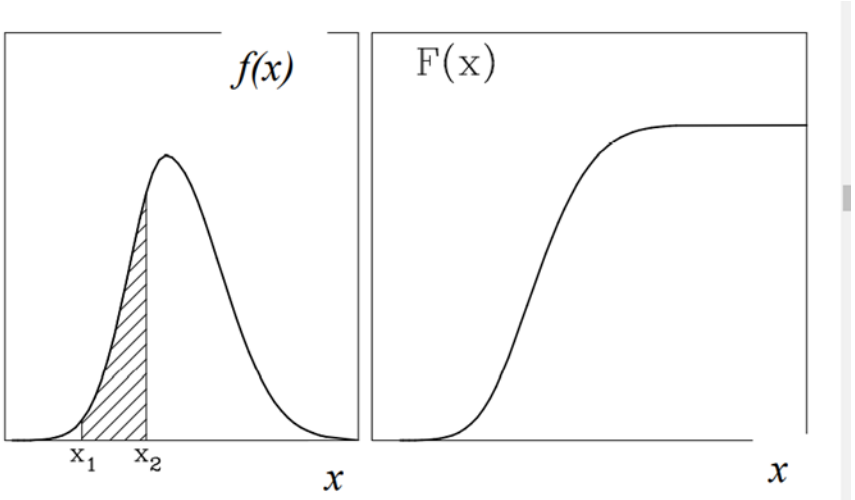
$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

## Función de distribución y densidad - Interpretación gráfica

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

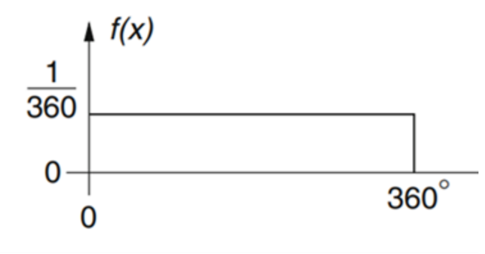
$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$



## Ejemplo de función de distribución y densidad - Interpretación gráfica

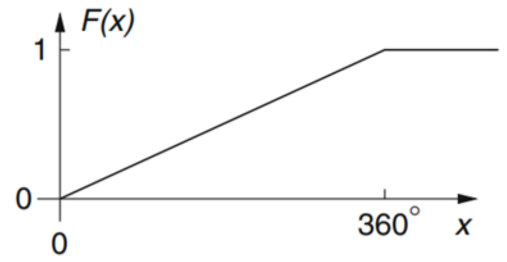
## Posición angular de la aguja de una rueda de la fortuna.

$$f(x) = \begin{cases} 1/360 & 0 \leq x < 360 \\ 0 & resto \end{cases}$$




$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{360} dt & 0 \leq x < 360 \\ 1 & x > 360 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{360} & 0 \leq x < 360 \\ 1 & x > 360 \end{cases}$$



## *Parámetros que caracterizan a una variable aleatoria*

Cada variable aleatoria tiene asociado una conjunto de parámetros que permiten caracterizar su comportamiento. Existen parámetros de centralización y parámetros de dispersión que dan información sobre la forma de la densidad de probabilidad/función de probabilidad de la variable.

Los parámetros de centralización son la **media**, la **mediana** y la **moda**.
Los parámetros de dispersión son la **varianza** y la **desviación estándar**.

**Media o valor esperado***:* es la suma (integral para el caso continuo) de todos los valores posibles xi de la variable aleatoria X multiplicada por la correspondiente probabilidad.

Caso de variable aleatoria discreta:

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \, P(X = x_i)$$

Caso de variable aleatoria continua::

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$$

**Mediana***:* es aquel valor de los valores posibles para la variable aleatoria X, tal que hace que su función distribución sea igual a 0.5.

$$F(x_{mediana}) = 0.5$$

$$\int_{-\infty}^{x_{mediana}} f(x)\,dx = 0.5$$

**Moda***:* es aquel valor de los valores posibles para la variable aleatoria X, en el cual su densidad de probabilidad, para el caso continuo, o su función de probabilidad, caso discreto, es máxima.

Caso de variable aleatoria discreta: $\mathrm{P}(x_{moda}) = máximo$

Caso de variable aleatoria continua:: $f(x_{moda}) = máximo$

**Cuantil***:* es aquel valor de los valores posibles para la variable aleatoria X, tal que hace que su función distribución sea igual a q.

$$F(x_q) = \int_{-\infty}^{x_q} f(x)\,dx = q$$

**Varianza**: da información sobre la dispersión promedio de los posibles valores de la variable aleatoria X en torno a su media.

Caso de variable aleatoria discreta: $$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \, P(X = x_i)$$

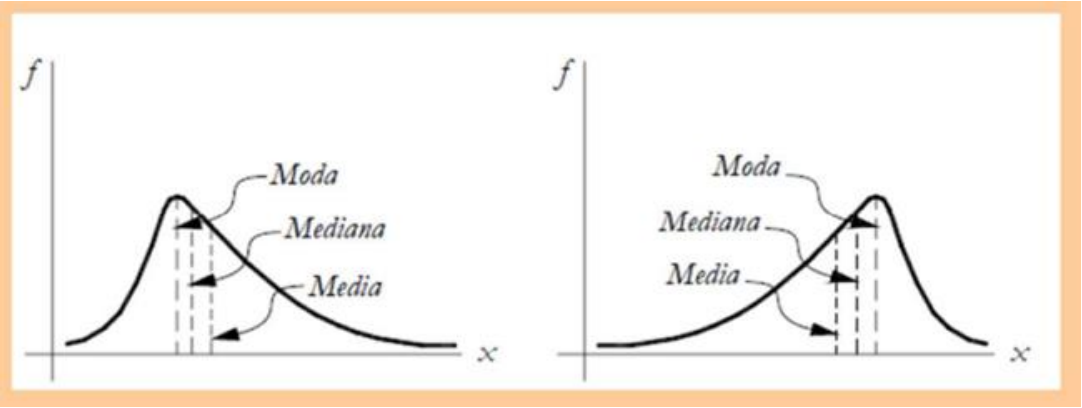
Caso de variable aleatoria continua: $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \, f(x) \, dx$$

**Desviación estándar**: se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Al igual que la varianza, da información sobre la dispersión en torno a la media. Tiene la misma unidad que la media.

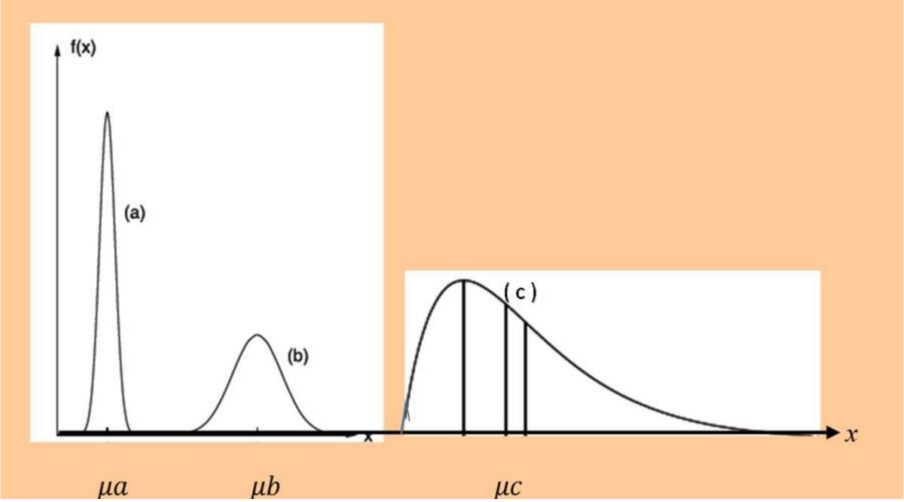
$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

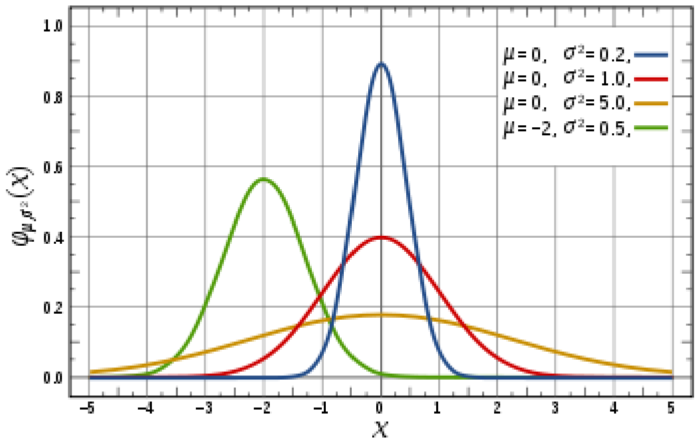
## *Interpretación gráfica de los parámetros*

### Media, mediana y moda

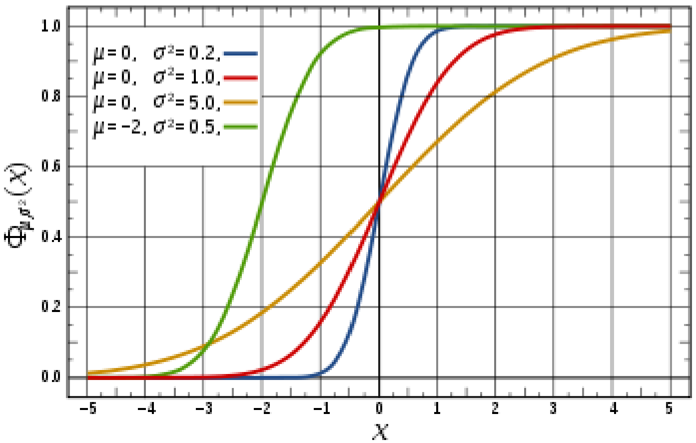



### Media y desviación estándar





$\mu=0, \quad \sigma^2=0.2,$
$\mu=0, \quad \sigma^2=1.0,$
$\mu=0, \quad \sigma^2=5.0,$
$\mu=-2, \sigma^2=0.5,$
$\varphi_{\mu,\sigma^2}(X)$
$X$

$\mu=0, \quad \sigma^2=0.2,$
$\mu=0, \quad \sigma^2=1.0,$
$\mu=0, \quad \sigma^2=5.0,$
$\mu=-2, \sigma^2=0.5,$
$\Phi_{\mu,\sigma^2}(X)$
$X$

**Ejercicio:** variable aleatoria, función probabilidad, función distribución, parámetros.

La tabla siguiente muestra la edad, en meses, a la que un grupo de 50 niños comenzó a caminar.

| $x_i$ (en meses) | Nro de niños | $P_e$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | | | |
| 10 | 4 | | | |
| 11 | 9 | | | |
| 12 | 16 | | | |
| 13 | 11 | | | |
| 14 | 8 | | | |
| 15 | 1 | | | |

a) Calcular la probabilidad empírica.
b) Obtener la función de distribución o probabilidad acumulada.
c) Calcular la media, moda y mediana (aprox.).
d) Calcular la varianza.

**Ejercicio:** variable aleatoria, función probabilidad, función distribución, parámetros.

Probabilidad empírica.

Función distribución / Función acumulativa

| $x_i$ (en meses) | Nro de niños | $P_e$ | F(xi) | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 1/50 | 0 | |
| 10 | 4 | 4/50 | 1/50 | |
| 11 | 9 | 9/50 | 5/50 | |
| 12 | 16 | 16/50 | 14/50 | |
| 13 | 11 | 11/50 | 30/50 | |
| 14 | 8 | 8/50 | 41/50 | |
| 15 | 1 | 1/50 | 49/50 | |

**Ejercicio 1:** variable aleatoria, función probabilidad, función distribución, parámetros.

Probabilidad empírica

Función distribución / Función acumulativa

| $x_i$ (en meses) | Nro de niños | $P_e$ | F(xi) | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 1/50 | 0 | |
| 10 | 4 | 4/50 | 1/50 | |
| 11 | 9 | 9/50 | 5/50 | |
| 12 | 16 | 16/50 | 14/50 | |
| 13 | 11 | 11/50 | 30/50 | |
| 14 | 8 | 8/50 | 41/50 | |
| 15 | 1 | 1/50 | 49/50 | |

Media: $$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \, P(X = x_i) = 12 \, meses$$

Mediana: $F(x_{mediana}) = 0.5 \longrightarrow x_{mediana} = entre\ 12\ y\ 13\ meses$

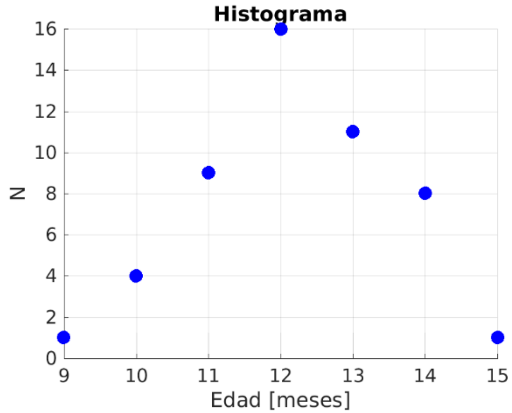
Moda: $\mathrm{P}(x_{moda}) = máximo \longrightarrow x_{moda} = 12\ meses$

Varianza: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \, P(X = x_i)$ = 2.8 meses

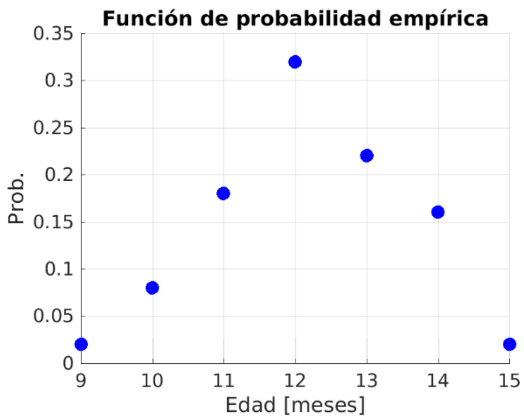
Desviación estándar:: $\sigma = 1.7\ meses$

**Ejercicio:** variable aleatoria, función probabilidad, función distribución, parámetros.

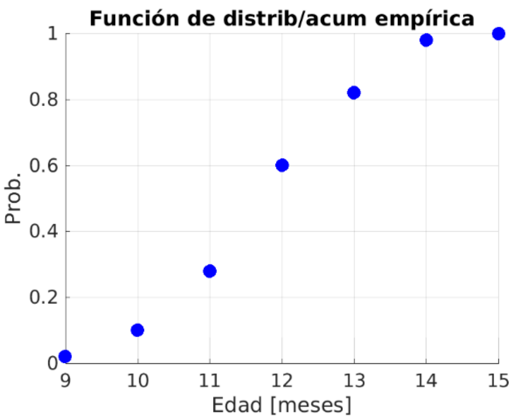
$$N_x$$




$$P(x) = \frac{N_x}{50}$$

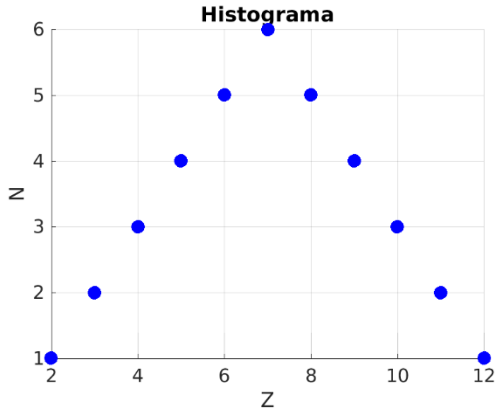


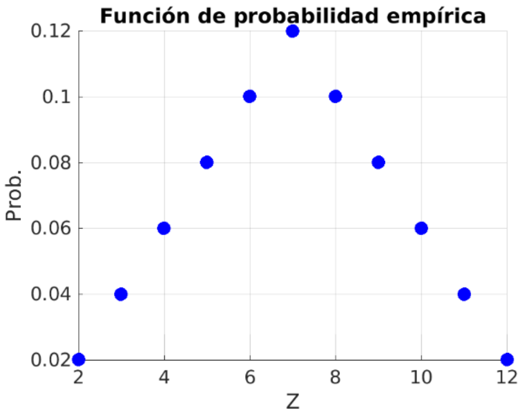

$$F(x) = P(X < x)$$

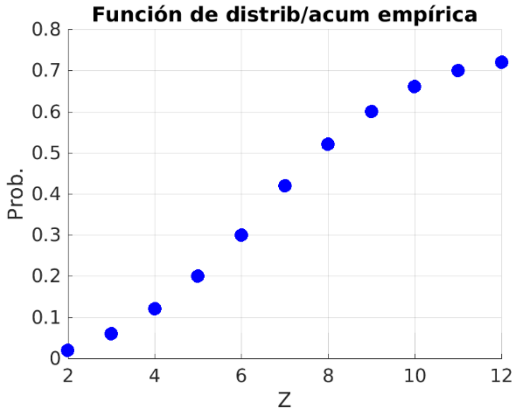


**Ejercicio:** variable aleatoria, función probabilidad, función distribución, parámetros.

Función de probabilidad, función de distribución y parámetros del experimento de lanzar dos dados y sumar su caras.



## *Operador Esperanza*

Sea X una v.a. y se define una nueva variable Y, como una función determinista de X:

$$Y = H(X)$$

Y es también una variable aleatoria con su función de distribución y función de densidad de probabilidad.

El **Operador Esperanza** aplicado a cualquier función de X, se define como:

Caso de variable aleatoria discreta: $$E[H(X)] = \sum_{i=1}^{n} H(x_i)\, P(X = x_i)$$

Caso de variable aleatoria continua: $$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\, f(x)\, dx$$

## *Propiedades del operador E[ . ]*

El operador E[ . ] es un operador ….:

***1)*** $$E[H(X) + G(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [(H(x) + G(x)] \, f(x) \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \, f(x) \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \, f(x) \, dx$$

$$= E[H(X)] + E[G(X)]$$

***2)*** Si $\lambda$ es constante : $E[\lambda] = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, f(x) \, dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \lambda$

***3)*** Si $\lambda$ es constante : $E[\lambda \, G(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \; G(x) \, f(x) \, dx$

$$= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \, f(x) \, dx$$

$$= \lambda \, E[G(X)]$$

## *Aplicación del operador esperanza – Momentos de una variable*

El momento de orden $l$ de la variable *X* con respecto a *C (constante), se define como:*

$$\mu_l = E[(X - C)^l]$$

Momento para el caso de $C = 0$ y $l = 1$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \mu$$

Media

Momentos para el caso de $C = \mu$

$$\mu_0 = E[(X-\mu)^0] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\mu_1 = E[(X-\mu)^1] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^1\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$$

$$\mu_2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx = \sigma^2$$

Varianza

$$\mu_3 = E[(X-\mu)^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3\, f(x)\, dx = \lambda$$

Sesgo

**Ejercicio**: aplicación del operador E[ .] para algunos resultados.

***1)*** $E[cX] = c\,E[X]$

***2)*** $\sigma_{cX}^2 = c^2\sigma_X^2$

***3)*** Obtener la media y desviación estándar de:

$$u = \frac{X - \mu_x}{\sigma_X}$$

Se dice que esta variable está normalizada o estandarizada:

## *Desigualdad de Chevychev*

Si X es una v.a. de la cual conocemos su media y varianza. La Desigualdad de Chevychev dice que para cual número positivo *k*:

$$P(|X - \mu_X| \geq k\, \sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}$$

La desigualdad establece una cota inferior a la probabilidad de que la variable se encuentre en un cierto intervalo en torno a la media.

Vale para cualquier v.a. sin importar su función de probabilidad o función de densidad de probabilidad.

Ejemplo, para *k = 3*

$$P(|X - \mu_X| \geq 3\, \sigma_X) \leq \frac{1}{9}$$

Demostración en el pizarrón

## *Transformación de variables*

Una función de una variable aleatoria es también una variable aleatoria.

Parece natural plantearse: si se conoce la función densidad de probabilidad de la primera, cómo es la expresión de la densidad de probabilidad de la nueva variable?

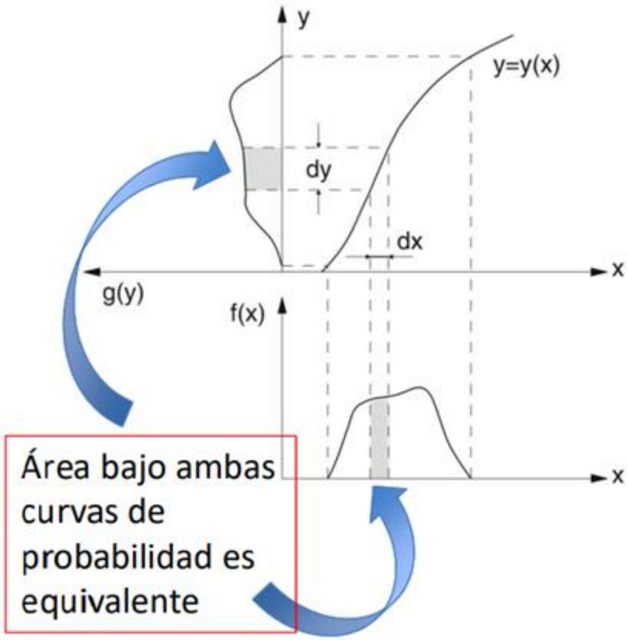
Variable aleatoria con densidad de probabilidad conocida: $X, f(x)$

Función que transforma de X a Y: $Y = Y(X)$

Cuál es la expresión de la función de densidad de probabilidad de Y? $g(y)$

## Caso para una función Y(X) **biyectiva** y **estrictamente creciente**

$X, f(x) \quad Y = Y(X) \quad g(y)$




$$P(x \leq X < x + dx) = P(y \leq Y < y + dy)$$

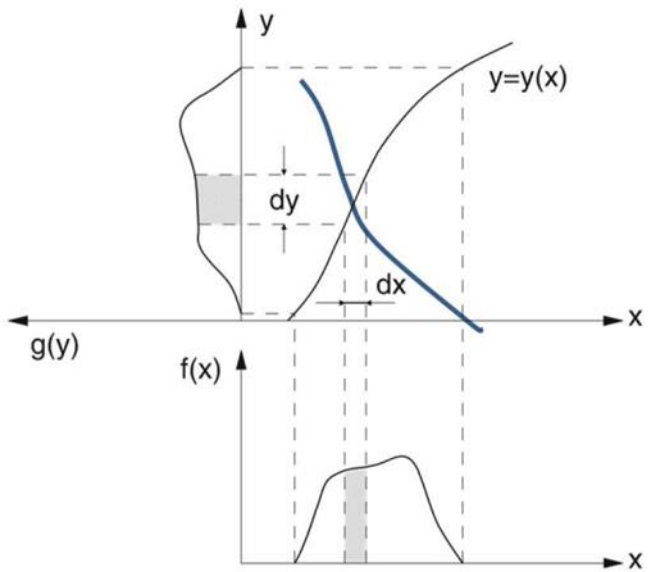
Por correspondencia de áreas:

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy$$

$$g(y) = f(x(y))\, \frac{dx}{dy}$$

## Caso para una función Y(X) **biyectiva** y **estrictamente decreciente**

$$X, f(x) \quad Y = Y(X) \quad g(y)$$




$$P(x \leq X < x + dx) = P(y + dy \leq Y < y)$$

Por correspondencia de áreas y considerando que tienen que ser positivas: :

$$f(x)\, dx = -g(y)\, dy$$

$$g(y) = \ f(x(y)) \left(-\frac{dx}{dy}\right)$$

## Resumiendo: expresión general para la transformación

Variable aleatoria con densidad de probabilidad conocida: $X, f(x)$

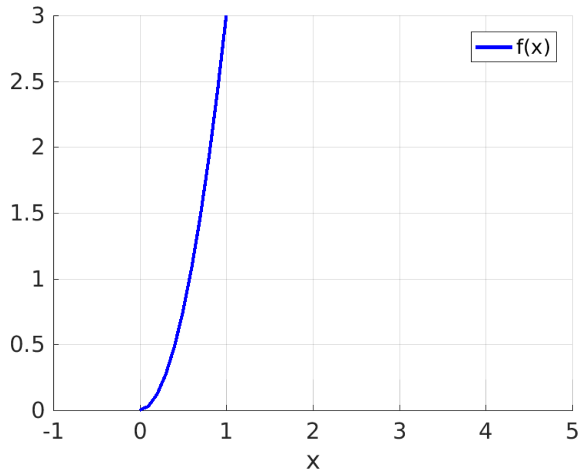
Función que transforma de X a Y: $Y = Y(X)$

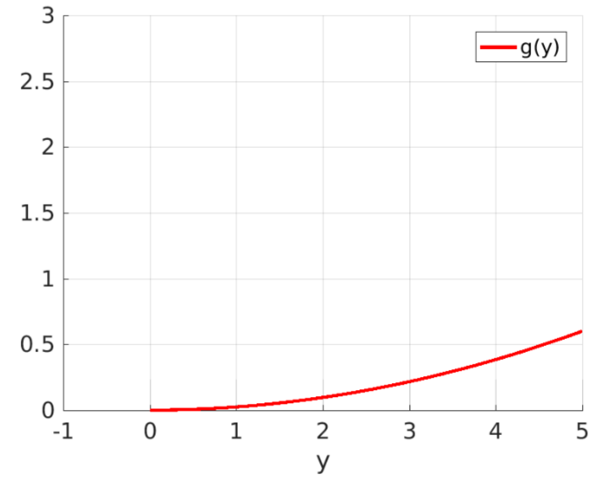
Función densidad de probabilidad de Y: $g(y) = f(x(y)) \left|\frac{dx}{dy}\right|$

## Ejemplo de transformación de variables

$$X, \qquad f(x) = \begin{cases} 3\,x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$Y = 5\,X \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{5}, \quad \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad g(y) = f(x(y))\left|\frac{dx}{dy}\right| = \begin{cases} 3\,\left(\frac{y}{5}\right)^2 \frac{1}{5} & 0 \le y \le 5 \\ 0 & resto \end{cases}$$



## Caso para una función Y(X) **no sea biyectiva**

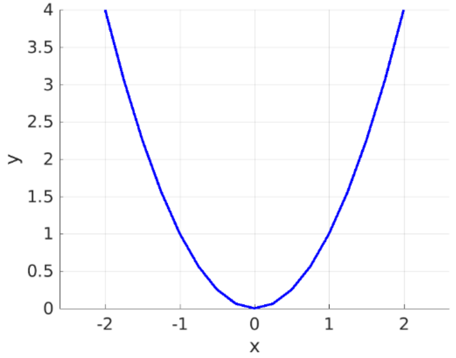
Si la función de transformación (relación entre las variables) no es biyectiva, se deber dividir el problema en situaciones en que se cumpla la condición.

Por ejemplo:

$X,\ f(\mathrm{x})$ Variable definida en los reales y función densidad de probabilidad

$Y = X^2$ Relación no biyectiva:

Hay que dividir el intervalo de x en dos regiones, x ≥ 0 y x < 0, y obtener una expresión de *g(y)* para cada rama y luego combinarlas.




Demostración en el pizarrón