

Función característica

Sea X una variable con función de probabilidad $F(x) = Prob(X < x)$ y densidad de probabilidad $f(x)$ la **función característica** de X queda definida como:

$$\varphi_X(t) = E[\exp(itX)] = E[e^{itX}]$$

Como veremos, la función característica es de mucha utilidad en demostraciones de resultados y propiedades de variables aleatorias.

Permite transformar (y anti-transformar) la función de densidad de probabilidad al campo complejo donde la función se simplifica, operar y volver al campo real.

El concepto de función característica es equivalente al de transformada y anti-transformada de Fourier.



Para el caso en que **X es continua**:

$$\varphi(t) = E[\exp(itX)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) f(x) dx$$

Para el caso en que **X es discreta**:

$$\varphi(t) = E[\exp(itX)] = \sum_i \exp(itx_i) P(X = x_i)$$

Para el caso en que **X es discreta**, la anti-transformada está dada por la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \varphi(t) dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(tx) - i \sin(tx)) \varphi(t) dt$$



Momentos de la variable X de orden n respecto al origen (definición):

$$\lambda_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$$

Por otro lado vemos que derivando φ respecto de t tenemos:

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(itx) f(x) dx$$

Luego:

$$\lambda_n = i^n \varphi^{(n)}(0)$$

En particular, para la media tenemos:

$$\mu = \lambda_0 = \varphi(0)$$



Momentos de la variable X de orden n respecto a al media μ :

Definimos: $W = X - \mu$

$$\varphi_W(t) = E[\exp(itW)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itw) g(w) dw$$

Como: $\frac{dx}{dw} = 1 \longrightarrow g(w) = f(x) \left| \frac{dx}{dw} \right| = f(x)$

$$\varphi_W(t) = E[\exp(itw)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it(x - \mu)) f(x) dx$$
$$\varphi_W^{(n)}(t) = \frac{d^n \varphi_W(t)}{dt^n} = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n \exp(it(x - \mu)) f(x) dx$$



$$\varphi_W^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n \exp(it(x - \mu)) f(x) dx$$

$$\varphi_W^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n f(x) dx$$

$$\varphi_W^{(n)}(0) = i^n E[(x - \mu)^n]$$

La expresión anterior relaciona los momentos respecto a la media con las derivadas de la función característica.

En particular, para la varianza tenemos:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2] = -\varphi_W^{(2)}(0)$$



Funciones características más comunes

1. Función característica de la densidad de probabilidad de Poisson

$$P(k) = \frac{1}{k!} \lambda^k \exp(-\lambda)$$

$$\begin{aligned}\varphi_K(t) &= E[\exp(itK)] = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(itk) P(k) \\ &= \sum_k \exp(itk) \frac{1}{k!} \lambda^k \exp(-\lambda) \\ &= \exp(-\lambda) \sum_k \exp(itk) \frac{1}{k!} \lambda^k \\ &= \exp(-\lambda) \sum_k \frac{1}{k!} (\lambda \exp(it))^k \\ \varphi_K(t) &= \exp(-\lambda) \exp(\lambda e^{it})\end{aligned}$$

Luego:

Función de densidad

$$P(k) = \frac{1}{k!} \lambda^k \exp(-\lambda)$$



Función característica

$$\varphi_K(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$



2. Función característica de la densidad de probabilidad de Gauss

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right)$$

$$\varphi(t) = E[\exp(itX)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right) dx$$

... *

Luego:

Función de densidad

Función característica

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right) \longleftrightarrow \varphi_X(t) = \exp(it\mu_X) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_X^2 t^2\right)$$

Comentario: la función característica de una función de Gauss con media igual a cero tiene ella misma una función de distribución de Gauss. El producto de las varianzas de ambas es igual a 1.

* La demostración es compleja y utiliza números complejos, se puede ver en las pp. 86 y 87 del Brandt.



Resultado importante: sean X e Y dos variables aleatorias independientes y definimos W como la suma de las anteriores.

Si X, Y independientes $\longrightarrow f_{x,y}(x, y) = f_x(x)f_y(y)$

$$W = X + Y$$

$$\begin{aligned}\varphi_W(t) &= E[\exp(itW)] = E[\exp(it(X + Y))] \\ &= E[\exp(itX + itY)] \\ &= E[\exp(itX) \exp(itY)] \\ &= E[\exp(itX)]E[\exp(itY)]\end{aligned}$$

Porque son indep.

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$$

Es decir: la función característica de la suma de dos variables aleatorias es igual al producto de las funciones características de las variables individuales. A continuación hay ejemplos del uso de este resultado.



Por ejemplo, sean X e Y variables aleatorias independientes con función densidad de probabilidad de Poisson. Aplicando el resultado anterior podemos encontrar la función densidad de probabilidad de $Z = X + Y$.

$$P_X(x) = \frac{1}{x!} \lambda^x \exp(-\lambda_X) \quad \varphi_X(t) = \exp\left(\lambda_X(e^{it} - 1)\right)$$

$$P_Y(y) = \frac{1}{y!} \lambda^y \exp(-\lambda_Y) \quad \varphi_Y(t) = \exp\left(\lambda_Y(e^{it} - 1)\right)$$

Entonces, para:

$$\begin{aligned} Z = X + Y &\longrightarrow \varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t) \\ &= \varphi_X(t) \varphi_Y(t) \\ &= \exp\left(\lambda_X(e^{it} - 1)\right) \exp\left(\lambda_Y(e^{it} - 1)\right) \\ &= \exp\left((\lambda_X + \lambda_Y)(e^{it} - 1)\right) \end{aligned}$$

La expresión resultante se corresponde con una función de Poisson donde $\lambda = \lambda_X + \lambda_Y$. Luego:

$$\varphi_Z(t) = \exp\left((\lambda_X + \lambda_Y)(e^{it} - 1)\right) \longrightarrow P_Z(z) = \frac{1}{z!} (\lambda_X + \lambda_Y)^z \exp(-(\lambda_X + \lambda_Y))$$



Teorema Central del Límite

Consideremos una variable aleatoria X , que sea la suma de los resultados de n experimentos X_i . Los X_i son variables aleatorias independientes con la misma función de densidad de probabilidad (**no importa cuál**), con media a y varianza b^2 .

El Teorema Central de Límite establece que:

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_i$$

Tendrá una función de densidad de probabilidad de Gauss con media y varianza iguales a:

$$\mu_X = na$$

$$\sigma_X^2 = nb^2$$



Demostración

Definimos:

$$X'_i = X_i - a \quad \varphi'_{X'_i}(0) = \mu_i = 0 \quad \varphi''_{X'_i}(0) = -b^2$$

Desarrollando por Taylor la función característica de X'_i :

$$\varphi_{X'_i}(t) = 1 + 0 t - \frac{1}{2} b^2 t^2 + \dots$$

Haciendo un cambio de variables:

$$U_i = \frac{X'_i}{b \sqrt{n}} = \frac{X - a}{b \sqrt{n}} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_{U_i} &= E[\exp(itU_i)] \\ &= E\left[\exp\left(it \frac{X'_i}{b \sqrt{n}}\right)\right] \\ &= \varphi_{X'_i}\left(\frac{t}{b \sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \varphi_{U_i}(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \dots$$



Luego, definimos una variable nueva y aplicamos el resultado que la función característica de una suma es el producto de las funciones características:

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n U_i \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_U(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\varphi_{U_i}(t)\}^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2n} + \dots \right\}^n \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} t^2\right) \end{aligned}$$

Luego, la función densidad de probabilidad que corresponde a esta función característica es:

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} u^2\right)$$

Es decir, la función de Gauss de media cero y varianza 1.

Finalmente, como:

$$U = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n U_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X - n a}{b \sqrt{n}} \longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{1}{2 n b^2} (x - n a)^2\right)$$



Experimento de verificación del Teorema Central del Límite con JupyterLab (TCL Exp1.ipynb)

Generamos una serie aleatoria que surge del calcular el promedio de las caras en una tirada de K dados.

Repetimos el proceso N veces.

Cara de un dado: $x \longrightarrow P(x = i) = \frac{1}{6}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Tirada 1: $x_1, x_2, \dots, x_K \longrightarrow z_1 = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K x_j$

Tirada N: $x_1, x_2, \dots, x_K \longrightarrow z_N = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K x_j$

$$\mu_Z = E[Z] = E\left[\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K x_j\right] = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K E[x_j] = E[x_1] = 3.5$$

Luego, según el TCL:

Z Tiene una función de densidad de Gauss con media 3.5



Función de distribución Normal (o Gaussiana) conjunta

Función Normal o de Gauss para una variable:

$$\begin{aligned} X \longrightarrow f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \mu_X) \frac{1}{\sigma_X^2} (x - \mu_X)\right) \end{aligned}$$

Generalización para N variables:

$$\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T \longrightarrow \Phi(\bar{x}) = K \exp\left(-\frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{a})^t B (\bar{x} - \bar{a})\right)$$

$$\Phi(\bar{X}): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

K \longrightarrow Factor de normalización

\bar{a} \longrightarrow Vector de N x 1

B \longrightarrow Matriz de N x N, simétrica y definida positiva



Características de Función de distribución Normal conjunta

1. El valor esperado de \bar{X} es: $E[\bar{X}] = \bar{a}$

$\Phi(\bar{X})$ es simétrica respecto de \bar{a} , luego:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - \bar{a}) \Phi(\bar{x}) d\bar{x} = 0$$

$$E[(\bar{x} - \bar{a})] = 0 \longrightarrow E[\bar{x}] = \bar{a}$$

$\therefore \bar{a}$ es la media de \bar{x} por lo que se lo escribe como $\bar{a} = \bar{\mu}$



2. Se cumple que: $B = C_{\bar{x}}^{-1}$

Derivando la integral de punto 1 respecto de \bar{a}

$$\frac{\partial}{\partial \bar{a}} \left(\iiint_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - \bar{a}) \Phi(\bar{x}) d\bar{x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}} (\bar{X}^t A \bar{X}) = 2 \bar{X}^t A, \text{ para } A \text{ s\u00edmetrica}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [I - (\bar{x} - \bar{a}) (\bar{x} - \bar{a})^t B] \Phi(\bar{x}) d\bar{x} = 0$$

$$E[(\bar{x} - \bar{a}) (\bar{x} - \bar{a})^t] B = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$C_{\bar{X}} B = I$$

$$B = C_{\bar{X}}^{-1}$$

$\therefore B$ es la inversa de la matriz de var-covar de \bar{x}



Características de Función de distribución Normal de dos variables (Función normal bi-variada)

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \Phi(\bar{x}) = K \exp\left(-\frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{\mu})^t B (\bar{x} - \bar{\mu})\right)$$

$$\Phi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = K \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_{X_1} \\ x_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}^t B \begin{bmatrix} x_1 - \mu_{X_1} \\ x_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}\right)$$

Donde:

$$B = C^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & cov(X_2, X_1) \\ cov(X_1, X_2) & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$B = \frac{1}{\sigma_{X_1}^2 \sigma_{X_2}^2 - cov(X_1, X_2)} \begin{bmatrix} \sigma_{X_2}^2 & -cov(X_2, X_1) \\ -cov(X_1, X_2) & \sigma_{X_1}^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{(2\pi)^{1/2n} (\det B)^{1/2}} \longrightarrow \text{Factor de normalización}$$



1. Distribución normal de dos variables con $cov(X_1, X_2) = 0$

$$B = \frac{1}{\sigma_{X_1}^2 \sigma_{X_2}^2 - cov(X_1, X_2)} \begin{bmatrix} \sigma_{X_2}^2 & -cov(X_2, X_1) \\ -cov(X_1, X_2) & \sigma_{X_1}^2 \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{X_1}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{X_2}^2} \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{(2\pi) (\det B)^{1/2}} \longrightarrow K = \frac{1}{(2\pi) \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}}$$

∴

$$\Phi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi) \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}} \right)^2 \left(\frac{x_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \right)^2 \right)$$



Podemos verificar que la probabilidad total es 1:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi) \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)^2 \left(\frac{x_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)^2\right) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi) \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)^2\right) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)^2\right) dx_2 \end{aligned}$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{(2\pi) \sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \sqrt{2\pi} \sigma_{X_1} \sqrt{2\pi} \sigma_{X_2}$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$



2. Distribución normal de dos variables con $cov(X_1, X_2) \neq 0$

$$\Phi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = K \exp \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_{X_1} \\ x_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}^t B \begin{bmatrix} x_1 - \mu_{X_1} \\ x_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix} \right)$$

Donde:

$$K = \frac{1}{(2\pi) (\det B)^{1/2}}$$

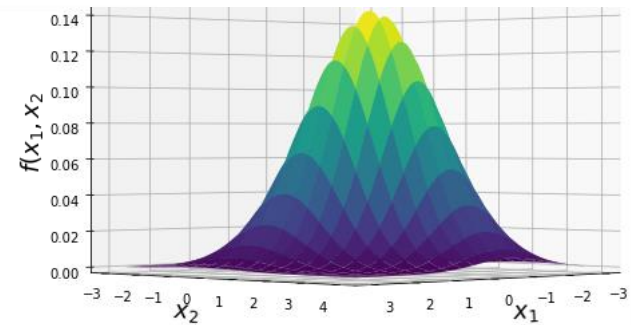
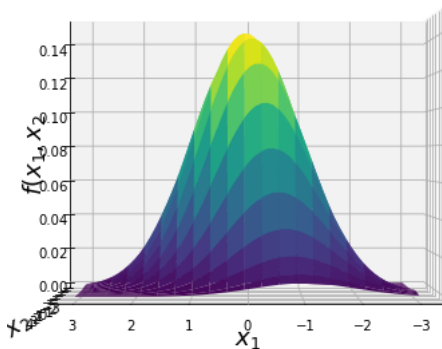
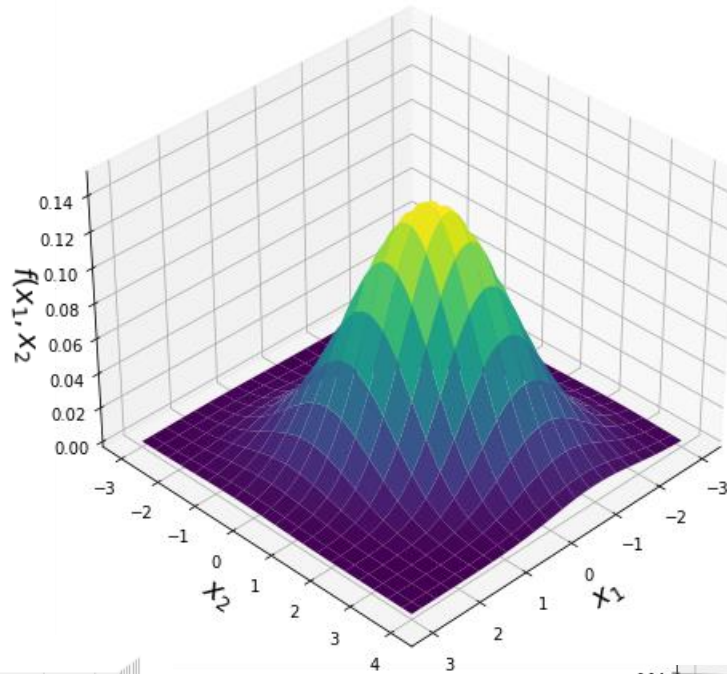
$$B = C_{X_1, X_2}^{-1} \quad C_{X_1, X_2} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & cov(X_1, X_2) \\ cov(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$B = \frac{1}{\sigma_{X_1}^2 \sigma_{X_2}^2 - cov(X_2, X_1)^2} \begin{bmatrix} \sigma_{X_2}^2 & -cov(X_2, X_1) \\ -cov(X_1, X_2) & \sigma_{X_1}^2 \end{bmatrix}$$



Representación gráfica:

$$\Phi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = K \exp \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_{X_1} \\ x_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix}^t B \begin{bmatrix} x_1 - \mu_{X_1} \\ x_2 - \mu_{X_2} \end{bmatrix} \right)$$



Análisis de la matriz de varianza – covarianza

Transformamos las variables según:

$$U_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, i = 1, 2 \quad \longrightarrow \quad \text{cov}(U_1, U_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \equiv \rho_{X_1, X_2}$$

ρ_{X_1, X_2} Se llama coeficiente de correlación

Luego, la densidad gaussiana conjunta queda expresada como: :

$$\Phi \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = K \exp \left(-\frac{1}{2} g(u_1, u_2) \right)$$

donde:

$$g(u_1, u_2) = \bar{u}^t B' \bar{u} \quad B' = \frac{1}{1 - \rho_{X_1, X_2}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho_{X_1, X_2} \\ -\rho_{X_1, X_2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{1 - \rho_{X_1, X_2}} (u_1^2 + u_2^2 - 2\rho_{X_1, X_2} u_1 u_2)$$



Elipse de covarianza

Las curvas de igual probabilidad quedan definidas para:

$$\Phi \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \text{Const1} \longrightarrow g(u_1, u_2) = \text{Const2}$$

En particular, cuando $\text{Const2} = 1$:

$$\frac{1}{1 - \rho_{X_1, X_2}} (u_1^2 + u_2^2 - 2\rho_{X_1, X_2} u_1 u_2) = 1$$

Expresando la ecuación en la variables originales y reacomodando:

$$\frac{(x_1 - \mu_{X_1})^2}{\sigma_{x_1}^2} - 2\rho_{X_1, X_2} \left(\frac{x_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{x_1}} \right) \left(\frac{x_1 - \mu_{X_2}}{\sigma_{x_2}} \right) + \frac{(x_2 - \mu_{X_2})^2}{\sigma_{x_2}^2} = 1 - \rho_{X_1, X_2}$$

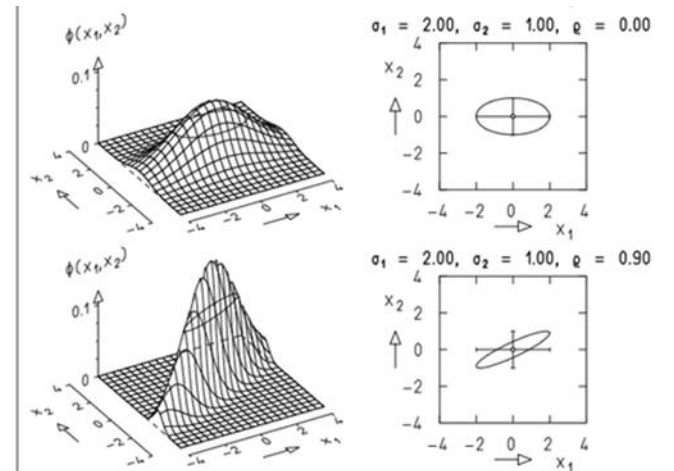
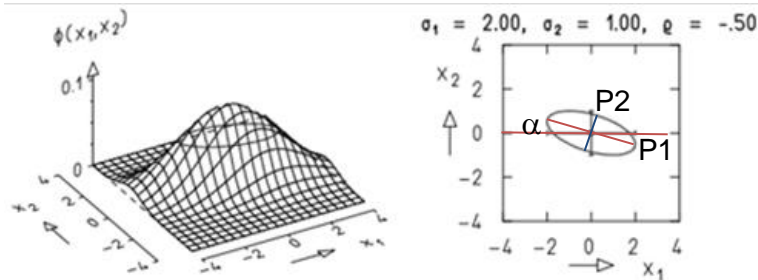
La anterior ecuación define la elipse de covarianza y corresponde a la curva tal que:

$$\iint_A \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.39$$



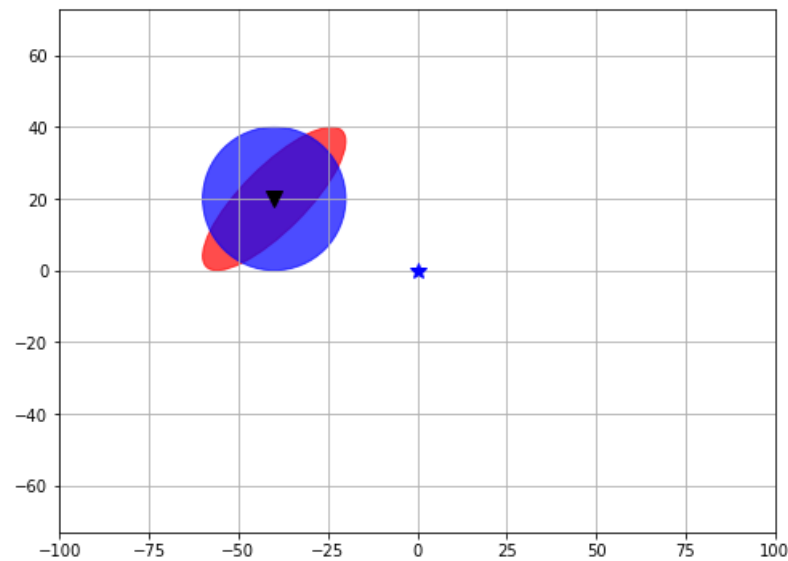
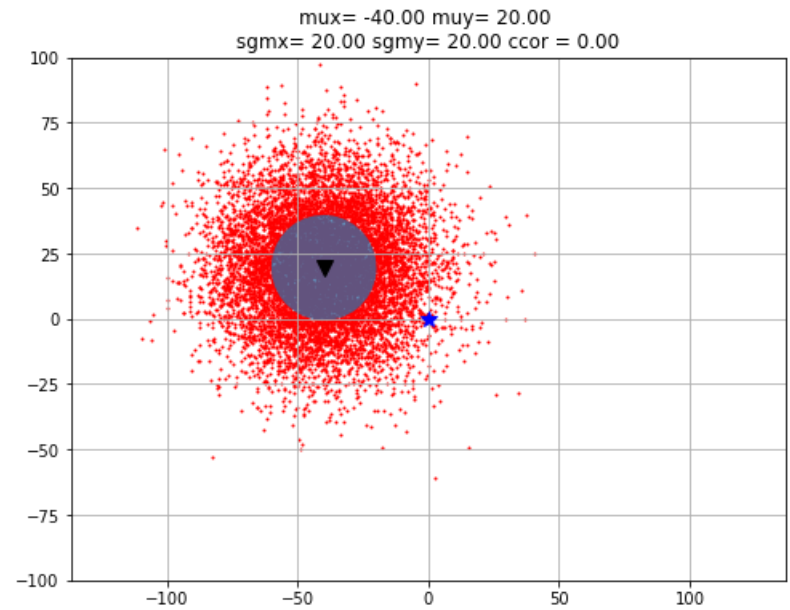
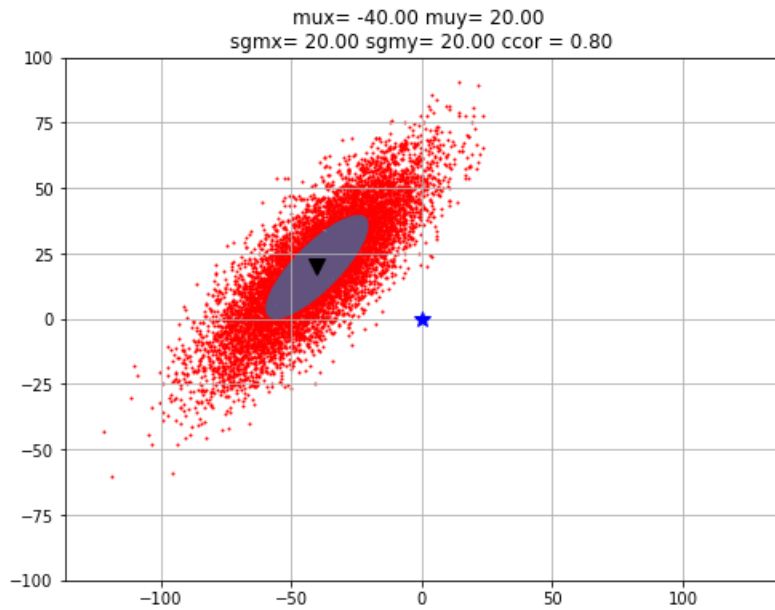
Los parámetros de la elipse se puede determinar a partir de:

Angulo	→	$\tan 2\alpha = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$,
Semi-eje mayor	→	$p_1^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2)}{\sigma_2^2 \cos^2 \alpha - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_1^2 \sin^2 \alpha}$
Semi-eje menor	→	$p_2^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2)}{\sigma_2^2 \sin^2 \alpha + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_1^2 \cos^2 \alpha}$



Experimento función normal conjunta con JupyterLab ([Gaussiana1D.ipynb](#), [Gaussian2D – Surface.ipynb](#) y [Gaussiana2D – Ellipses.ipynb](#))





Muestreo aleatorio

Las clases anteriores presentamos una número de distribuciones (funciones de densidad de probabilidad) pero no dijimos nada de cómo obtenerlas para casos particulares. Solamente presentamos la función que describe la probabilidad de que una variable esté en cierto intervalo.

Esta función **depende** de ciertos **parámetros** (por ejemplo μ y σ para la función de Gauss o λ para la función de Poisson) que, en general, **son desconocidos**.

Por lo tanto, no tenemos conocimiento directo de la **distribución de probabilidad** y debemos **aproximarla** por la **distribución de frecuencia**, obtenida de forma experimental.

El conjunto de mediciones que utilicemos se llama **muestra** y siempre será finita.



Definiciones

Población: conjunto con todos los posibles resultados de una observación individual. En general, la cantidad de resultados es infinita.

Muestra: es un subconjunto de elementos de la población. Por definición, la cantidad de elementos es finita. Una muestra con n elementos se dice que es una muestra de tamaño n .

Sea la población de los posibles resultados de la variable X , con una función de densidad de probabilidad $f(x)$. Supongamos que tomamos l muestras de tamaño n :

Muestra 1: $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}$

Muestra j : $X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)}$

Muestra l : $X_1^{(l)}, X_2^{(l)}, \dots, X_n^{(l)}$

Definimos el vector que contiene las n mediciones de una muestra como:

$$\bar{x}^{(j)} = \left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)} \right)$$



La función de densidad de probabilidad de este vector será:

$$g(\bar{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Esta función debe satisfacer dos condiciones para que la muestra se considere **aleatoria (random)**. Si **cumple** estas **condiciones** entonces la **muestra es aleatoria**.

a) Las mediciones individuales x_i deben ser independientes, luego:

$$g(\bar{x}) = g_1(x_1) g_2(x_2) \dots g_n(x_n)$$

b) Las funciones marginales individuales deben ser idénticas e iguales a:

$$g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_n(x) = f(x)$$

Luego: $g(\bar{x}) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n)$

Si una **muestra cumple** estas **condiciones** entonces la **muestra es aleatoria** y la función conjunta se simplifica significativamente.

De aquí en más la palabra **muestra** refiere a **muestra aleatoria**.



Función distribución empírica

Supongamos una muestra de dimensión n de la variable X , representada por el conjunto $\{x_i, i = 1, n\}$. Supongamos que los valores de la muestra se encuentran ordenados de menor a mayor. Se define la **función de distribución empírica** como:

$$W_n(x) = \frac{n_x}{n}$$

n_x es la cantidad de elementos tales que: $X < x$
 n tamaño de la muestra

Es una función escalera que se incrementa en $\frac{1}{n}$ cuando x se hace mayor que un elemento de la muestra.

La función también se llama función de distribución de la muestra y es una aproximación de la función de distribución de la población $F(x)$.

Se puede entender que:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(x)$$



Estadístico: es cualquier función de los elementos de una muestra. Como la muestra es una variable aleatoria, el estadístico también lo es.

Una situación común en el análisis de datos es conocer la expresión matemática de la función densidad de probabilidad de una población, pero desconocer los valores de los parámetros.

La solución consiste tomar una muestra (finita) de la variable o de variables relativas y determinar los valores de los parámetros, de la forma más exacta posible.

Como la muestra es finita, **nunca** vamos a obtener los **valores exactos de los parámetros**, lo que obtenemos son **estimadores de los parámetros**.



Estimador de un parámetro: es un estadístico que sirve para estimar el valor de un parámetro de una función de probabilidad, a partir de una muestra.

$$S = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sea:

$$S = S(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ estimador de } \lambda$$

a) **Estimador sin sesgo:** es aquel que sin importar el tamaño de la muestra, el valor esperador del estimador es igual al parámetro que estima

$$E[S] = \lambda$$

b) **Estimador consistente:** es aquel cuya varianza tiende a cero cuando el tamaño de la muestra crece arbitrariamente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(S) = 0$$

c) **Estimador eficiente:** en muchas situaciones es posible obtener una cota para el estimador de la varianza del estimador. El estimador cuya varianza se aproxime más a la cota se dice que es el más eficiente.



Muestreo de una población homogénea – Estimadores de parámetros

El caso de mayor aplicación es el relativo a una muestra, $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, de una población de infinitos valores descrita por la función de densidad de probabilidad $f(x)$. Entonces, tenemos que:

$$E[X_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x g_i(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \mu_X \text{ y } \sigma(X_i) = \sigma_X.$$

1. Estimador de la media de la población / Media muestral:

$$\tilde{\mu}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

1. a Verificación de ausencia de sesgo

$$E[\tilde{\mu}_X] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

$$= \frac{1}{n} n E[X_1]$$

$$\therefore E[\tilde{\mu}_X] = \mu_X$$



1.b Verificación de consistencia

$$\sigma^2(\tilde{\mu}_X) = E[(\tilde{\mu}_X - \mu_X)^2] \longleftarrow \text{Varianza de la media de la muestra}$$

$$\begin{aligned} &= E \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{n} \mu_X \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n^2} E \left[\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu_X)^2] + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n E[(X_i - \mu_X)(X_j - \mu_X)] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2(X_i) \\ &= \frac{\sigma_X^2}{n} \end{aligned} \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2(\tilde{\mu}_X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_X^2}{n} \rightarrow 0$$

Conclusión de 1.a y 1.b: la media de la muestra (también llamado promedio simple o media aritmética) es un buen estimador de la media (parámetro) de la población.



2. Estimador de la varianza de la población / Varianza muestral:

Como estimador de la varianza de la población, podemos probar con la media aritmética (promedio) del cuadrado de las diferencias:

$$S'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{\mu}_X)^2$$

2. a Verificación de ausencia de sesgo

$$\begin{aligned} E[S'^2] &= E \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{\mu}_X)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_X + \mu_X - \tilde{\mu}_X)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu_X)^2] + \sum_{i=1}^n E[(\mu_X - \tilde{\mu}_X)^2] + 2 \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu_X)(\mu_X - \tilde{\mu}_X)] \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_X^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_X^2 + 2 \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu_X)(\mu_X - \tilde{\mu}_X)] \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
E[(X_i - \mu_X)(\mu_X - \tilde{\mu}_X)] &= -E[(X_i - \mu_X)(\tilde{\mu}_X - \mu_X)] \\
&= -E\left[(X_i - \mu_X) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \mu_X)\right)\right] \\
&= -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E[(X_i - \mu_X)(X_j - \mu_X)] \\
&= -\frac{\sigma_X^2}{n}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
E[S'^2] &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_X^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_X^2 - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_X^2}{n} \right\} \\
&= \sigma_X^2 - \frac{1}{n} \sigma_X^2
\end{aligned}$$

$$E[S'^2] = \frac{n-1}{n} \sigma_X^2$$

∴ No es un buen estimador porque depende de n



Sin embargo, la expresión anterior nos permite proponer otro estimador que eliminará el sesgo:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{\mu}_X)^2$$

Verifiquemos:

$$\begin{aligned} E[S^2] &= E \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{\mu}_X)^2 \right] \\ &= E \left[\frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{\mu}_X)^2 \right] \\ &= E \left[\frac{n}{n-1} S'^2 \right] \\ &= \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma_X^2 \end{aligned}$$

$$E[S^2] = \sigma_X^2 \quad \therefore S \text{ es un estimador sin sesgo}$$



2. b Verificación de consistencia

La varianza de la varianza de la población tiene esta expresión (no la vamos a demostrar):

$$\sigma^2(S^2) = \left(\frac{\sigma_X^2}{n-1} \right)^2 2(n-1)$$

$$\sigma^2(S^2) = \frac{2}{n-1} \sigma_X^4$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2(S^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_X^4}{n-1} \rightarrow 0$$

Conclusión de 2.a y 2.b: la varianza de la muestra es un buen estimador de la varianza (parámetro) de la población.



Resapitulando:

Sea $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ una muestra de una población de infinitos valores descrita por la función de densidad de probabilidad $f(x)$.

La situación es equivalente a tener un conjunto de n mediciones de una cierta cantidad d . Entonces podemos pensar $X_i = d + v_i$ con $\mu_X = d$ y $v_i \sim N(0, \sigma)$.

Entonces:

1. Media muestral:
$$\tilde{\mu}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

a) Es un buen estimador de la media de la población.

b) El estimador de su varianza está dado por: $\tilde{\sigma}^2(\tilde{\mu}_X) = \frac{S^2}{n}$

c) Por el Teorema Central del Límite, su función de densidad de probabilidad es una función de Gauss con media μ_X . Esto tiene implicancias en la distribución de la probabilidad en torno a la media.



2. Varianza muestral:
$$S^2 = \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{\mu}_X)^2$$

a) Es un buen estimador de la varianza de la población.

b) El estimador de su varianza está dado por: $\tilde{\sigma}^2(S^2) = \frac{2}{n-1} S^4$

c) Su función de densidad de probabilidad es una función de Chi-2.

d) También se la puede designa con el símbolo $\tilde{\sigma}_x^2$



Ejercicio con JupyterLab:

Histograma, Gráfico de frecuencias, Función distribución empírica.

Muestra, media y varianza poblacionales, media y varianza muestrales



Muestreo aleatorio de una población in-homogénea

Sea G una población dividida en diferentes subpoblaciones $G_1, G_2, G_3, \dots, G_t$, cada una descrita por una función de densidad de probabilidad diferente $f_1(x), f_2(x), \dots, f_t(x)$.

Ejemplo: podemos pensar a G como al conjunto de todos los estudiantes universitarios de un país y G_1, G_2, \dots, G_t , representan a las subpoblaciones de estudiantes de las universidades $1, 2, \dots, t$. Supongamos que una cantidad X (variable) de interés tiene funciones de densidad de probabilidad $f_1(x), f_2(x), \dots, f_t(x)$.

A partir de esto, las funciones de distribución (prob. acumulada) individuales se pueden escribir como:

$$F_i(x) = P(X < x / X \in G_i)$$

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^x f_i(x') dx'$$

Recordando probabilidad:

$$\text{Si: } G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_t \quad \longrightarrow \quad P(B) = \sum_{i=1}^t P(B/G_i) P(G_i)$$



Luego, podemos plantear que la función de distribución (acumulada) de la población tiene la forma:

$$F(x) = P(X < x)$$
$$F(x) = \sum_{i=1}^t P(X < x / X \in G_i) P(X \in G_i)$$
$$F(x) = \sum_{i=1}^t F_i(x) p_i$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^t P(B/G_i) P(G_i)$$
$$p_i = P(X \in G_i)$$

Finalmente, la función densidad de probabilidad de la población será:

$$f(x) = \sum_{i=1}^t f_i(x) p_i$$

A esta expresión se la describe como 'promedio pesado'



Media de una población in-homogénea

$$\begin{aligned}\mu_X = E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{i=1}^t f_i(x) p_i dx \\ &= \sum_{i=1}^t \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x) dx p_i \\ &= \sum_{i=1}^t \mu_{X_i} p_i\end{aligned}$$

$$\therefore \mu_X = \sum_{i=1}^t \mu_{X_i} p_i \quad \leftarrow \text{Promedio pesado de las medias de cada población}$$



Varianza de una población in-homogénea

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \sum_{i=1}^t f_i(x) p_i dx \\ &= \sum_{i=1}^t p_i \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{X_i} + \mu_{X_i} - \mu_X)^2 f_i(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^t p_i \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{X_i})^2 f_i(x) dx + (\mu_{X_i} - \mu_X)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) dx + \right. \\ &\quad \left. \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{X_i})(\mu_{X_i} - \mu_X) f_i(x) dx = 0 \right\}\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma^2(X) = \sum_{i=1}^t p_i \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^t p_i (\mu_{X_i} - \mu_X)^2$$

Acuerdo interno

Acuerdo externo



Estimadores de los parámetros de una población in-homogénea

Las expresiones vistas de las páginas anteriores nos permiten definir expresiones para los estimadores de la media, la varianza del estimador de la media y la varianza de una población in-homogénea

1. Estimador de la **media de la población**:

$$\tilde{\mu}_X = \sum_{i=1}^t \tilde{\mu}_{X_i} p_i$$

2. Estimador de la **varianza del estimador de media**:

$$\tilde{\mu}_X = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_t] \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{X_1} \\ \tilde{\mu}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mu}_t \end{bmatrix} \quad C_{\tilde{\mu}_{X_i}} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}_{X_1}}^2 & 0 \cdots 0 \\ 0 \tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}_{X_2}}^2 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & \tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}_{X_t}}^2 \end{bmatrix}$$

Aplicando propagación de errores:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}_x}^2 &= [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_t] C_{\tilde{\mu}_{X_i}} [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_t]^t \\ \therefore \tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}_x}^2 &= \sum_{i=1}^t \tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}_{X_i}}^2 p_i = \sum_{i=1}^t \frac{\tilde{\sigma}_{X_i}^2}{n_i} p_i \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores son válidas para:

- el caso de tener una muestra de cada subpoblación de manera que pueda estimar los valores de los parámetros poblacionales
- el caso de tener para cada subpoblación un solo valor y su estimador de varianza. Para este caso tenemos que $n_i = 1$

3. Estimador de la **media de la población**:

$$\tilde{\sigma}^2(X) = \sum_{i=1}^t p_i \tilde{\sigma}_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^t p_i (\tilde{\mu}_{X_i} - \tilde{\mu}_X)^2$$

Para poder utilizar las expresiones anteriores todavía falta encontrar expresiones para los p_i .



Función de Verosimilitud

Esta función se utiliza para encontrar las expresiones de los estimadores de parámetros de una función de densidad de probabilidad para casos más generales de los que vimos hasta el momento (estimador de media y varianza de población homogénea).

Tenemos un vector, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)'$, con los parámetros de la función de probabilidad de un vector de variables aleatorias, $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ dada por $F(\vec{x}, \vec{\lambda})$.

Si tenemos una muestra \vec{x} , podemos pensar a $F(\vec{x}, \vec{\lambda})$ como una función de $\vec{\lambda}$.

Sea $\vec{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ una muestra cuya probabilidad a posteriori (conociendo los valores de la muestra) es:

$$dP^{(j)} = f(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}) d\vec{x} \longrightarrow \text{probabilidad de que saliera un valor entre } \vec{x}^{(j)} \text{ y } \vec{x}^{(j)} + d\vec{x}$$



Si tomamos una muestra de tamaño N (es decir tomamos N valores independientes de la variable \vec{x} ,

$$\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(N)}\}$$

Su probabilidad total será:

$$dP = \prod_{j=1}^N f(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}) d\vec{x}$$

A partir de la expresión anterior, se define la Función de Verosimilitud que depende de $\vec{\lambda}$. Se la llama con la letra L y a su logaritmo con l :

$$L(\vec{\lambda}) = \prod_{j=1}^N f(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}) \quad l(\vec{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \ln(f(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}))$$

L y l son funciones de la muestra por lo que ellas mismas son variables aleatorias y no deben confundirse con funciones de densidad de probabilidad.



Método de máxima Verosimilitud (más confiables)

El método establece que los parámetros más confiables son los que hacen máxima la Función de Verosimilitud.

El problema de encontrar el mejor estimador para $\vec{\lambda}$ se transforma en encontrar la expresión de $\vec{\lambda}$ que haga máxima la Función de Verosimilitud. Lo que equivale a buscar $\vec{\lambda}$ tal que:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} l(\vec{\lambda}) = 0, i = 1, p$$

Por ejemplo, supongamos que la función densidad de probabilidad depende solamente de un parámetro λ . Podemos escribir:

$$\frac{d}{d\lambda} l(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^N \ln \left(f(\vec{x}^{(j)}, \lambda) \right) = \sum_{i=1}^N \frac{f'(\vec{x}^{(j)}, \lambda)}{f(\vec{x}^{(j)}, \lambda)}$$



$$\frac{d}{d\lambda} l(\lambda) = \sum_{i=1}^N \varphi(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda})$$

Donde:

$$\varphi(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}) = \frac{f'(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda})}{f(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda})}$$

Es la derivada logarítmica de $f(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda})$:

El problema de encontrar el mejor estimador para $\vec{\lambda}$ se transforma en encontrar la expresión de $\vec{\lambda}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^N \varphi(\vec{x}^{(j)}, \vec{\lambda}) = 0$$



Aplicación del método a mediciones con diferentes precisiones

Supongamos que medimos N veces, $\{x^j, j = 1, N\}$, una magnitud con N instrumentos de diferentes precisiones conocidas. Suponemos que los errores de las mediciones tienen una distribución normal (de Gauss) y la varianza es $\sigma_j, j = 1, N$.

El método de máxima verosimilitud nos sirve para encontrar el estimador más confiable para la media de la población.

Sabemos que:

$$f(x^j, \lambda) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(x^j - \lambda)^2}{2\sigma_j^2}\right) dx$$

$$L(\lambda) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(x^j - \lambda)^2}{2\sigma_j^2}\right)$$

$$l(\lambda) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{(x^j - \lambda)^2}{\sigma_j^2} + Cte$$



Aplicando el método de máxima verosimilitud, el estimador más confiable está dado por:

$$\frac{d}{d\lambda} l(\tilde{\lambda}) = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{(x^j - \tilde{\lambda})^2}{2\sigma_j^2} + Cte \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{(x^j - \tilde{\lambda})}{\sigma_j^2} = 0$$

Despejando:

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2} x^j = 0$$

Se puede demostrar que:

$$\frac{d^2 l}{d\lambda^2}(\tilde{\lambda}) = - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2} \longrightarrow \tilde{\lambda} \quad \text{Es un máximo}$$



Luego, la expresión para el estimador más confiable para la media de una población in-homogénea está dado por:

$$\tilde{\mu} = \sum_{j=1}^N p_j x^j \quad \text{con pesos dados por:} \quad p_j = \frac{\frac{1}{\tilde{\sigma}_j^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2}}$$

Para completar, recordando la expresión para su varianza, podemos definir es estimador para esta como:

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}}^2 = \sum_{j=1}^t \tilde{\sigma}_{X_j}^2 p_j^2$$



Ejemplo de estimación de parámetros de poblaciones homogéneas

Se ha medido la intensidad de corriente en un circuito con seis instrumentos diferentes resultados la siguiente tabla.

Necesitamos calcular un valor que represente la intensidad de la corriente y dar un estimador de su error (desviación estándar).

Instr.	Corriente [Amp]
1	0.630
2	0.641
3	0.675
4	0.700
5	0.642
6	0.631

Caso de población homogénea – Promedio simple

$$\tilde{\mu}_I = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 I_i = 0.653 \text{ Amp}$$

$$S_I = \sqrt{\frac{1}{6-1} \sum_{j=1}^6 (I_j - \tilde{\mu}_I)^2} = 0.028 \text{ Amp}$$

$$S_{\tilde{\mu}_I} = \sqrt{\frac{1}{6(6-1)} \sum_{j=1}^6 (I_j - \tilde{\mu}_I)^2} = 0.011 \text{ Amp}$$

El valor representativo de la corriente es $0.653 \pm 0.011 \text{ Amp}$



Ejemplo de estimación de parámetros de in-homogéneas

Supongamos que tenemos la misma situación anterior pero ahora conocemos las precisiones de los instrumentos.

Instr.	Corriente [Amp]	Precisión (desv. estandar)
1	0.630	0.010
2	0.641	0.011
3	0.675	0.030
4	0.700	0.051
5	0.642	0.011
6	0.631	0.021

Caso de población in-homogénea
– Promedio pesado

$$\tilde{\mu}_I = \sum_{j=1}^6 p_j I^j = 0.639 \quad p_j = \frac{\frac{1}{\tilde{\sigma}_j^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2}}$$

$$S_{\tilde{\mu}_I} = \sqrt{\sum_{j=1}^6 p_j^2 \tilde{\sigma}_j^2} = 0.006 \text{ Amp}$$

Si además sabemos que cada medida resulta de promedio de 10 mediciones entonces:

